

# Konvergensi Metode Elemen Hingga Polygonal Hibrid dalam Analisis Kristal Fotonik 2D

Eny Sukani Rahayu<sup>1</sup>, Samiadji Herdjunto<sup>2</sup>

**Abstract**— Finite element method (FEM) with hybrid polygonal elements using Wachspress shape functions to analyze the band gap characteristic of two-dimensional photonic crystals (2D PCs) is presented in this paper. Hybrid polygonal elements are mix elements between polygonal ( $n>3$ ) and triangular elements. In triangular elements, Wachspress shape function is linear while in polygonal elements, the shape function becomes high order. The performance of the method compared with which of the linear triangular FEM is presented in its convergence rate graph showing the trend of accuracy. The flexibility in meshing using polygonal elements with Wachspress shape function as the interpolation function is also presented. The results show that hybrid polygonal FEM gives better accuracy compared with linear triangular FEM.

**Intisari**— Metode elemen hingga (*finite element method*, FEM) dengan elemen poligon hibrid menggunakan fungsi bentuk Wachspress untuk menghitung karakteristik celah frekuensi dari kristal fotonik dua dimensi (2D) disajikan dalam makalah ini. Elemen poligon hibrid merupakan kombinasi elemen segitiga ( $n=3$ ) dan poligon ( $n>3$ ). Dalam elemen segitiga, fungsi bentuk Wachspress adalah linier sedangkan di elemen poligon, fungsi bentuk tersebut memiliki orde yang tinggi. Perbandingan kinerja metode FEM poligon hibrid dan FEM segitiga linier disajikan dalam grafik konvergensi yang menunjukkan kecenderungan tingkat akurasi. Fleksibilitas dalam pembentukan *mesh* menggunakan elemen poligon dengan fungsi bentuk Wachspress sebagai fungsi interpolasi juga disajikan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa FEM poligon hibrid memberikan akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan FEM segitiga linier.

**Kata kunci**— Elemen poligon, FEM poligon hibrid, fungsi bentuk Wachspress, PC 2D, konvergensi.

## I. PENDAHULUAN

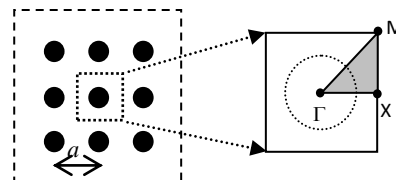
Kristal fotonik (*photonic crystal*, PC) adalah struktur dielektrik periodik yang memiliki karakteristik celah pita fotonik (*photonic band gap*, PBG) yang membuat gelombang cahaya dengan frekuensi dalam celah frekuensi tidak dapat menembus struktur. Dengan kata lain, gelombang cahaya dengan rentang frekuensi pada celah frekuensi akan dipantulkan oleh PC [1]. Sifat utama PC adalah dapat mengontrol propagasi gelombang cahaya dan hal ini memberikan motivasi yang besar dalam modifikasi dan merancang perangkat dengan kinerja tinggi seperti sirkuit terpadu fotonik (*photonic integrated circuit*, PIC) untuk mendukung PICs generasi berikutnya di dunia nanoteknologi [2], [3], [9]. Kontribusi besar dua dimensi (2D) PC menghasilkan beberapa perangkat seperti laser, skrup dan sebagian besar perangkat optik digunakan dalam jaringan optik [2], [9]. Salah satu contoh dari PC 2D adalah sebuah PC kisi (*lattice*) persegi ditunjukkan pada Gbr. 1.

Sebuah perangkat keras berbasis PC memiliki frekuensi operasional yang dipilih dari karakteristik celah frekuensi PC yang biasa bertujuan untuk mengurangi rugi-rugi. Karena

celah frekuensi adalah sifat yang paling penting dari PC, analisis karakteristik celah frekuensi menggunakan pendekatan numerik merupakan langkah awal yang perlu ditingkatkan tingkat akurasi.

Karakteristik celah pita frekuensi PC tersebut bergantung pada struktur geometri PC seperti jenis kisi, *filling ratio*, dan bahan yang digunakan. Struktur geometri bervariasi tergantung pada desain PC dan pada proses fabrikasi yang tidak sempurna. Oleh karena itu, perbaikan dengan pendekatan numerik untuk menghitung karakteristik celah frekuensi perlu dilakukan pengujian.

Beberapa metode telah diajukan seperti metode *plane wave expansion* (PWE) [4], *finite difference time domain* (FDTD) [5], *compact finite difference frequency domain* (FDFD) [7] dan FEM [3], [6], [8]. Metode yang paling fleksibel dalam aplikasi untuk setiap bentuk struktur geometri dari domain perhitungan adalah FEM. Metode ini lebih cocok untuk menganalisis PC bahkan kondisi nyata PC yang memiliki kemungkinan geometri yang non-ideal akibat deformasi pada geometri PC karena adanya proses fabrikasi yang tidak sempurna. PWE, sebuah metode semi-analitis, tidak akan dapat mengikuti model struktur tersebut secara efisien karena PWE hanya dapat memodelkan struktur dielektrik periodik yang ideal. Dua metode lain, FDFD dan FDTD, kurang fleksibel dan kurang efektif bila dibandingkan dengan FEM dalam pemodelan domain dengan bentuk struktur geometri yang tak beraturan dan melengkung karena pemodelan yang berbasis grid [5], [7].



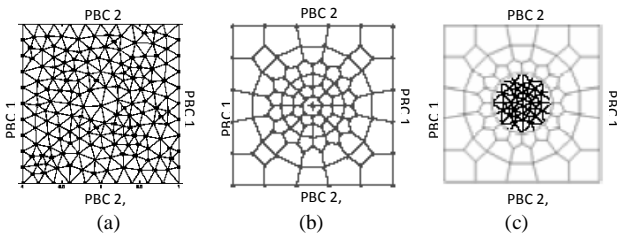
Gbr. 1 Sebuah PC kisi persegi dengan sel unit diperbesar yang menunjukkan zona Brillouin pertama tak tereduksi (diarsir) [20]

Sebelumnya, FEM untuk analisis ini dirumuskan dengan memasukkan teorema Bloch dalam persamaan utama ragam TE dan TM yang menghasilkan perumusan FEM yang rumit untuk memodelkan struktur periodis. Dengan menerapkan *periodic boundary conditions* (PBC) dalam pemodelan struktur periodis [7], hal ini memberikan formulasi yang lebih sederhana dan hasil pendekatan yang baik.

FEM merupakan metode pendekatan guna menyelesaikan masalah nilai batas yang tidak banyak membutuhkan memori [3], [8], [12], [14]. Sistem PC 2D mulanya dimodelkan dengan menggunakan elemen segitiga dengan fungsi interpolasi linier [11], [15], [17]. Pembentukan *mesh* menggunakan elemen poligon sembarang yang kemudian disebut FEM poligon telah dilaporkan pada permasalahan lain [12], [16], [18], [19]. Penerapan FEM poligon sembarang pada PC 2D dapat ditunjukkan untuk elemen poligon sembarang dengan  $n>3$  [20]. Pekerjaan ini menguji FEM

<sup>1,2</sup> Jurusan Teknik Elektro dan Teknologi Informasi Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada, Jln. Grafika 2 Yogyakarta 55281 INDONESIA (telp: 0274-552305; e-mail: eny@te.ugm.ac.id, samiadji@te.ugm.ac.id)

poligonal untuk menghitung karakteristik celah frekuensi dengan FEM poligonal yang dimodifikasi menggunakan *mesh* hibrid yang menggabungkan poligonal ( $n > 3$ ) dan elemen segitiga ( $n = 3$ ) untuk lebih lanjut menguji fleksibilitas FEM poligonal. Hasil ini diharapkan lebih efisien, efektif dan memberikan akurasi yang lebih tinggi dari FEM segitiga linier dalam analisis dari setiap desain PC 2D menggunakan fungsi bentuk Wachspress dalam bentuk nisbah fungsi polinomial yang ordennya menyesuaikan bentuk elemen poligon [12], [15], [16]. Gbr. 2 menunjukkan perbedaan *mesh* yang dibentuk dari elemen segitiga, elemen poligon sembarang, dan elemen poligon hibrid pada domain perhitungan.



Gbr. 2 Sampel dari *mesh* pada domain perhitungan dengan a) elemen segitiga, (b) elemen poligon, dan c) elemen poligon hibrid dengan penerapan PBC

II. METODE ELEMEN HINGGA POLIGONAL

A. Persamaan Utama Gelombang Ragam TE dan TM pada PC 2D

Untuk menghitung karakteristik celah frekuensi, empat persamaan Maxwell berlaku sebagai persamaan dasar yang menyusun persamaan gelombang. Media PC diasumsikan *lossless*, isotropik dan non-magnetik. PC 2D adalah struktur dielektrik periodik dengan kisi persegi, yang seragam sepanjang sumbu  $z$  dari sistem koordinat. Persamaan gelombang yang berasal dari persamaan Maxwell dibagi menjadi 2 persamaan *eigensystem* independen, yaitu sebagai ragam TE dan TM. Dalam ragam TM, medan listrik terpolarisasi dalam arah  $z$  sementara pada ragam TE, medan magnet terpolarisasi pada arah  $z$ . Persamaan utama untuk kedua polarisasi dinyatakan dalam (1)

$$-\nabla \cdot p(x,y)\nabla u(x,y) = \frac{\omega^2}{c^2} q(x,y)u(x,y) \tag{1}$$

Untuk ragam TM, solusi dari  $u(x,y) = E_z(x,y)$  dan konstanta  $p(x,y)$  dan  $q(x,y)$  masing-masing adalah sama dengan  $\mu_r^{-1}$  dan  $\epsilon_r$ . Sedangkan untuk ragam TE, solusi dari  $u(x,y) = H_z(x,y)$ ,  $p(x,y) = \epsilon_r^{-1}$  dan  $q(x,y) = \mu_r$ . Di sini,  $\epsilon_r$  adalah permitivitas relatif medium sementara permeabilitas relatif dari media,  $\mu_r = 1$  untuk bahan non-magnetik,  $\omega$  menunjukkan frekuensi sudut gelombang cahaya, dan  $c$  adalah kecepatan cahaya dalam hampa. Nilai *eigen* dari persamaan *eigensystem* dalam (1) adalah frekuensi resonansi dari PC untuk vektor gelombang yang didefinisikan. Persamaan (1) digunakan dalam formulasi FEM bersama dengan PBC.

Kondisi bidang batas yang periodis menggunakan fungsi Bloch untuk pemodelan struktur periodis dengan melibatkan vektor gelombang. Vektor gelombang yang digunakan pada nilai masukan diambil dari tepi zona Brillouin tak tereduksi dari satu sel unit PC kisi persegi yang ditentukan oleh algoritma sel Weigner-Seitz [10]. Solusi pendekatan FEM dihitung untuk setiap sampel vektor gelombang sampai karakteristik celah frekuensi diperoleh untuk semua vektor gelombang pada sel unit tersebut.

Sel unit yang digunakan sebagai domain perhitungan adalah zona Brillouin pertama dari PC kisi persegi dengan batang dielektrik dikelilingi oleh media udara. Gbr. 1 mengilustrasikan PC kisi persegi dengan sel unit dan zona Brillouin tak tereduksi dengan PBC yang sesuai. Persamaan (2) dan (3) menunjukkan persamaan PBC 1 dan PBC 2 yang letaknya sesuai Gbr. 2 [7],

$$u(x+a, y) |_{\Gamma_2} = e^{-jk_x a} u(x, y) |_{\Gamma_1} \tag{2}$$

$$u(x, y+a) |_{\Gamma_2} = e^{-jk_y a} u(x, y) |_{\Gamma_1} \tag{3}$$

dengan  $u$  adalah solusi pendekatan pada batas domain di tepi  $\Gamma_1$  dan  $\Gamma_2$ . Simbol  $a$  menunjukkan panjang periodisitas dari titik-titik kisi persegi seperti pada Gbr. 1. Sementara  $k_x$  dan  $k_y$  adalah vektor gelombang masing-masing pada arah  $x$  dan  $y$ , yang didefinisikan dari zona Brillouin tak tereduksi.

Sel unit kemudian didiskretisasi dengan elemen-elemen poligon terbatas membentuk sebuah *mesh* poligon. Pada *mesh* poligon, elemen yang menyusunnya dapat bervariasi dengan  $n$ -gon yang berbeda-beda yang saling berdampingan. Hal ini tentunya diwujudkan dengan pemilihan fungsi bentuk poligon yang sesuai sehingga fleksibilitas penggunaan elemen dapat ditingkatkan.

B. Fungsi Bentuk Wachspress

Pbedaan utama antara FEM segitiga dan FEM poligonal adalah pada fungsi interpolasinya. Fungsi bentuk Wachspress dipilih untuk elemen poligon cembung [12], [15], [17] yang diperoleh berdasarkan konsep koordinat barisentris. Keunikan fungsi ini adalah ketika diterapkan pada elemen segitiga fungsi ini akan menjadi fungsi interpolasi yang linier sehingga fungsi ini sangat fleksibel untuk tipe elemen dari orde rendah hingga orde tinggi, seperti kombinasi hibrid yang disajikan hasil penelitian ini.

Fungsi bentuk  $N_i^e$  dalam FEM digunakan untuk mencari solusi pendekatan medan yang tidak diketahui  $u$  dalam sebuah elemen  $e$  menggunakan ekspansi (4).

$$\bar{u}^e = \sum_{i=1}^n N_i^e u_i^e \tag{4}$$

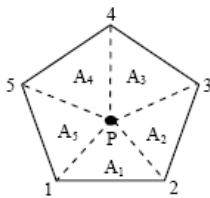
Fungsi bentuk Wachspress yang digunakan dalam (4) dirumuskan oleh (5) untuk  $j=1,2,\dots,n$

$$N_i^e = \frac{\omega_i^e}{\sum_{j=1}^n \omega_j^e} \tag{5}$$

dengan  $\omega_j$  adalah non-normalisasi koordinat barisentris yang berfungsi sebagai fungsi bobot untuk titik  $j$  [18] yang dicari dengan (6) untuk  $j=1,2,\dots,n$

$$\omega_j = \frac{A(u_{j-1}, u_j, u_{j+1})}{A(u_{j-1}, u_j, p)A(u_j, u_{j+1}, p)} \tag{6}$$

sehingga ketika (6) disubstitusikan ke (5), fungsi bentuk menjadi rasio polinomial. Gbr. 3 menunjukkan contoh elemen poligon cembung dalam bentuk segi lima ( $n=5$ ) dengan titik P sebagai pusatnya.



Gbr. 3 Sebuah elemen pentagon (poligon segi lima)

Contoh perhitungan dari luas segitiga yang dibuat oleh titik  $j-1, j$  dan  $P$ , yaitu  $A(j-1, j, p)$  untuk  $j=2$  dirumuskan dalam (7) yang akan memberikan angka positif dengan urutan sebagai berikut.

$$A^e(1,2, p) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

C. Formula FEM

Formulasi FEM dibangun berdasarkan metode Galerkin untuk kedua ragam TM dan TE yang didasarkan pada persamaan utama dalam (1). Untuk kasus ragam TM, solusi dari medan listrik  $E_z$  diperkirakan dalam bentuk ekspansi linear fungsi bentuk pada (4). Dengan penerapan metode Galerkin, fungsi galat residu  $R(x,y)$  seperti dalam (8).

$$R = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_r \bar{u} \quad (8)$$

Menurut metode Galerkin, integral dibentuk dengan mengintegrasikan  $R$  dan fungsi bentuk dengan fungsi bobot  $w$  yang dibuat nol seperti yang ditunjukkan pada (9) untuk meminimalkan galat untuk  $i=1,2,\dots,n$ . Dengan melakukan integrasi parsial, sistem persamaan diperoleh seperti yang diberikan dalam (10) untuk  $i=1,2,\dots,n$ .

$$\int_{\Omega} w_i R dx dy = 0 \quad (9)$$

$$\int w \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} d\Gamma - \iint \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy + \iint w \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_r \bar{u} dx dy = 0 \quad (10)$$

Substitusi  $u$  pada (10) dengan (4) pada suku integral permukaan dan dengan (2-3) untuk suku integral garis pada tepi domain, menyusun persamaan ke dalam bentuk *eigensystem* (12). Integrasi numerik diambil hanya di dalam elemen karena titik-titik pada batas elemen mengikuti persamaan PBC. Karena itu, integral permukaan dalam (10) ditulis ulang di (11) dengan integran  $f(x,y)$ . Integrasi numerik pada elemen poligon  $e$  didekati oleh partisi elemen menjadi sejumlah  $m$  segitiga  $e_A$  (sub-triangulasi) dan aturan kuadratur standar diterapkan pada setiap sub-segitiga guna mendapat rumus integral berikut [18].

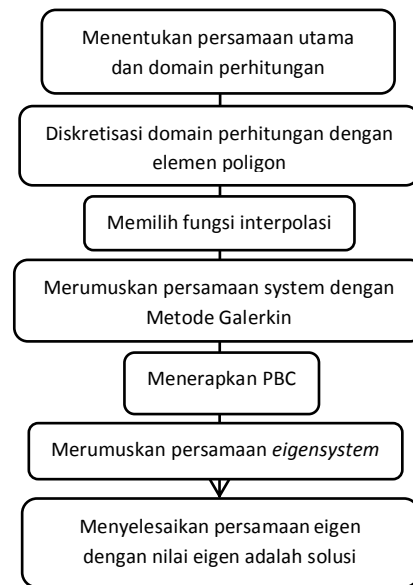
$$\iint_e f(x,y) dx dy = \sum_{e_A=1}^m \iint_{e_A} f(x,y) dx dy \quad (11)$$

Akhirnya, persamaan *eigensystem* dalam bentuk matriks (12) dapat diperoleh.

$$[A]\{u\} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [B]\{u\} \quad (12)$$

Dengan mencari solusi (12) untuk tiap vektor gelombang  $k$ , diperoleh sebuah himpunan solusi nilai eigen. Semua nilai eigen diplot untuk tiap  $k$  dan hasilnya merupakan karakteristik celah frekuensi.

Secara keseluruhan, proses yang dilakukan dalam FEM ditunjukkan oleh Gbr. 4.



Gbr. 4 Proses FEM polygon

Validasi hasil dari nilai eigen diambil dengan menghitung galat pendekatan menggunakan *norm* energi galat relatif (13) [16].

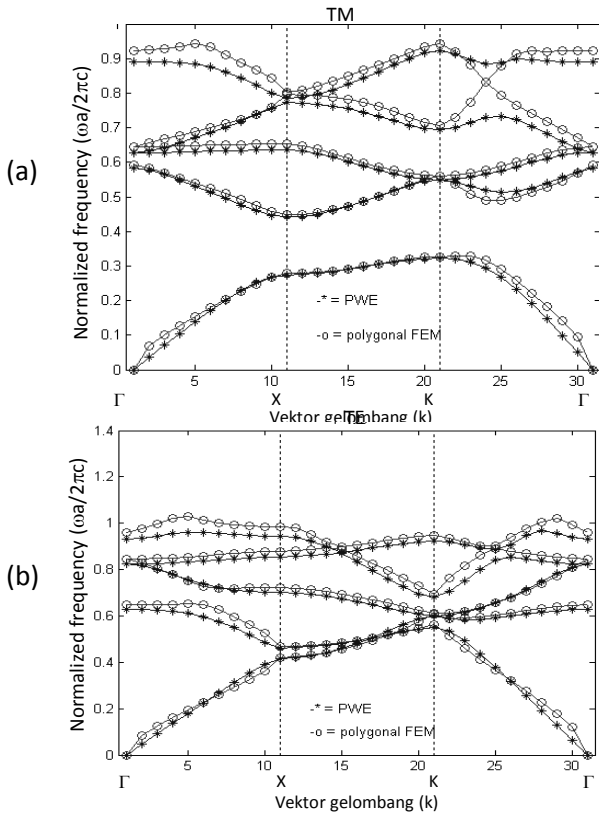
$$\frac{\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \quad (13)$$

- dengan  $u$  = data pembandingan
- $u^h$  = data hasil FEM
- $\Omega$  = domain perhitungan

Data FEM dihitung dengan MATLAB sebagai alat pemrograman. Data pembandingan merupakan data referensi yang diperoleh dari perangkat lunak MPB yang dikembangkan oleh MIT. Data pembandingan ini diperoleh dari metode *plane wave expansion* (PWE). Pemodelan struktur dirancang dengan perangkat lunak GID yang sekaligus digunakan sebagai pembangkit *mesh*.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil FEM segitiga dan FEM polygonal divalidasi menggunakan hasil dari PWE sebagai metode yang semi-analitis dengan menjalankan perangkat lunak MPB untuk resolusi 128x128. Gbr.5 menyajikan hasil karakteristik celah frekuensi yang diperoleh dari FEM poligon untuk PC kisi persegi dari batang dielektrik dengan  $\epsilon_r=8,9$  yang dikelilingi oleh media udara untuk lima pita frekuensi terendah dengan menggunakan 4 titik gauss.



Gbr. 5. Karakteristik celah frekuensi PC kisi persegi dengan  $\epsilon_r = 8,9$  dalam batang dikelilingi oleh media udara untuk ragam (a) TM dan (b) TE

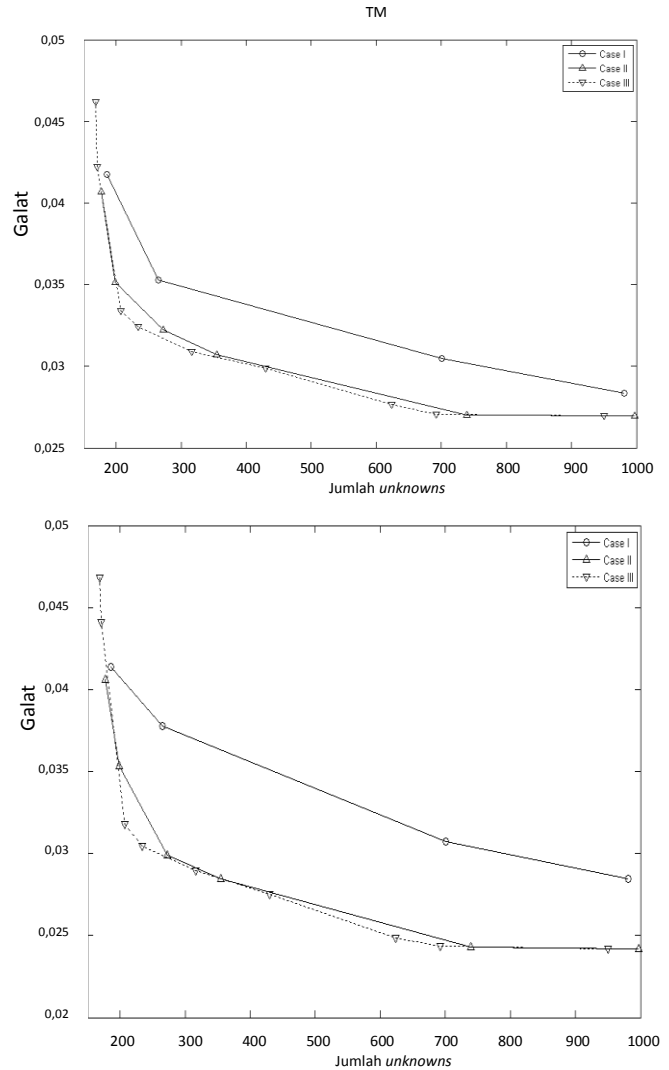
Uji konvergensi untuk lima pita frekuensi terendah ditunjukkan pada Gbr. 6. Uji konvergensi menunjukkan bahwa FEM poligon hibrid dengan *mesh* campuran antara elemen segitiga linier dan elemen poligon memberikan akurasi yang lebih baik dari FEM segitiga linier.

Penambahan jumlah titik dalam elemen poligon memperbesar orde fungsi interpolasi yang dapat diterapkan secara efektif dengan memperhatikan perilaku medan pada domain yang dianalisis guna meningkatkan ketelitian.

Dalam FEM poligon seperti juga pada FEM pada umumnya, elemen pada daerah yang dinamis harus didekati dengan elemen berorde lebih tinggi dibanding daerah yang non-dinamis.

Pada *mesh* poligon hibrid, fungsi bentuk Wachspress memberikan interpolasi linier dalam elemen segitiga linier dan menyediakan interpolasi orde tinggi dalam elemen poligon. Oleh karena itu, dalam *mesh* poligon hibrid ada kombinasi antara interpolasi linier dan interpolasi orde tinggi.

Untuk PC 2D, modifikasi *mesh* poligon ke dalam *mesh* poligon hibrid dilakukan dengan memilih interpolasi linier (elemen segitiga) untuk diskretisasi daerah batang sementara di daerah udara dengan elemen berorde lebih tinggi. Keakuratan FEM poligon hibrid yang diperoleh ternyata tampak lebih tinggi atau setara ketika jumlah segitiga hasil sub-triangulasi pada suatu area setidaknya sama dengan jumlah elemen segitiga pada area yang sama yang didekati dengan FEM segitiga linier. Hal ini diamati dari proses integrasi numerik dalam FEM poligon. Konvergensi FEM poligon hibrid relatif hampir sama dengan konvergensi FEM poligon.



Gbr. 6 Laju konvergensi dari FEM segitiga linier (*case I*), FEM poligon (*case II*), dan FEM poligon hibrid (*case III*) untuk ragam TE dan TM hingga 1000 jumlah *unknown*

Hal ini menunjukkan bahwa untuk sistem dengan daerah yang perilaku medannya tidak begitu fluktuatif seperti yang ada pada batang, penggunaan elemen segitiga linier sudah cukup sedangkan untuk daerah yang medannya berfluktuasi lebih tepat bila digunakan elemen poligon orde tinggi lebih.

#### IV. KESIMPULAN

Dalam analisis menggunakan FEM poligon hibrid, jumlah elemen segitiga hasil sub-triangulasi menentukan akurasi dari hasil pendekatan. Selain itu, pengetahuan tentang perilaku medan yang dianalisis berguna dalam menentukan pemilihan elemen untuk diskretisasi. Daerah dengan perilaku medan yang cenderung baik bila didiskretisasi dengan elemen poligon orde tinggi. Daerah dengan perilaku medan yang cenderung stabil cukup didiskretisasi dengan elemen poligon linier (segitiga). Dengan memperhatikan beberapa hal tersebut, konvergensi FEM poligon hibrid terbukti memberikan akurasi lebih tinggi dari FEM segitiga linier. Misalnya, dalam kasus TM untuk sekitar 200 jumlah *unknown*, FEM poligon hibrid dapat memberikan nilai galat 0,033 sedangkan FEM segitiga linier memberikan nilai galat yang lebih tinggi dari 0,04.

## REFERENSI

- [1] S.G. Johnson dan J.D. Joannopoulos, "Introduction to photonic crystals: Bloch's theorem, band diagram, and Gap (but no defects)", 2003, <http://ab-initio.mit.edu/photons/tutorial/photonic-intro.pdf> (akses January, 2006).
- [2] A.Yamilov, dkk., "Photonic band structure of ZnO photonic crystal slab laser", *Journal of Applied Physics*, vol. 98, 103102, 2005.
- [3] B.P. Hiett, dkk., "Application of finite element methods to photonic crystal modeling", *IEE Proc.-Sci. Meas. Technol.*, vol. 149, no. 5, 2002.
- [4] J.D. Shumpert, "Modeling of periodic dielectric structures (Electromagnetic crystals)", Disertasi untuk gelar Doctor of Philosophy (Electrical Engineering), The University of Michigan, 2001.
- [5] X. L. Yang, dkk., "Theoretical bandgap modeling of two-dimensional triangular photonic crystals formed by interference technique of three noncoplanar beams", *Optics Express* 1053, vol. 11, no. 9, 2003.
- [6] B.P. Hiett, dkk., "Photonic celah frekuensi in 12-fold symmetric quasicrystals", *Journal of Material Science: Materials in Electronics*, no. 14, page 413-416, 2003.
- [7] Chin-ping Yu dan Hung-chun Chang, "Compact finite-difference frequency-domain method for the analysis of two-dimensional photonic crystals", *Optic Express* 1397, Vol. 12, No. 7, 2004.
- [8] W. Axmann dan P. Kuchment, "An efficient finite element method for computing spectra of photonic and acoustic celah frekuensi materials I. Scalar case", *Journal of Computational Physics*, No. 150, page 468-481, 1999.
- [9] Cuesta-Soto, dkk., "All-optical switching structure based on a photonic crystal directional coupler", *Optics Express* 161, Vol. 12, No. 1, 12 January 2004.
- [10] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics, 7th edition*, John Wiley&Sons, Inc., 1996.
- [11] Kenji K. dan Tsutomo K., *Introduction to optical waveguide analysis, solving Maxwell's equations and the Schrodinger's equations*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [12] N. Sukumar dan A. Tabarei, "Conforming polygonal finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 61, hal. 2045-2066, 2004.
- [13] Giuseppe Pelosi, dkk., *Quick finite elements for electromagnetic waves*, Artech House, Inc., Boston, London, 1998.
- [14] Jianming Jin, *The finite element method in electromagnetics*, John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [15] M. Meyer, dkk., "Generalized barycentric coordinates on irregular polygons", *Journal of Graphic Tools*, Vol. 7, No. 1, hal. 13-22, 2002.
- [16] N. Sukumar dan E.A. Malsch, "Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants", *Arhives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 1, hal. 129-163, 2006.
- [17] J. Warren, dkk., "Barycentric coordinates for convex sets", *Advances in Computational and Applied Mathematics*, 2005.
- [18] N. Sukumar dan A. Tabarrei, "Numerical formulation and application of polygonal finite elements", *7th International ESAFORM Conference on Material Forming*, Trondheim, Norway, 2004.
- [19] Timo Euler, dkk., "Polygonal Finite Elements", *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 42, No. 4, April 2006
- [20] Rahayu, E.S. dan Angkaew, T., "A Finite Element Method with Polygonal Elements for Analyzing a Band Gap Characteristic of Square Lattice Photonic Crystals", *ECTI-CON*, Chiang Rai, Thailand, 2007