

Linierisasi Model Sistem *Ball and Beam* dan Metode Kendali LQG Berbasis MATLAB-Simulink

Hanifah Suwardi¹, Anisa' Septyaning Choir¹, Salima Nurrahma¹, Imroatul Hudati^{1*}

¹Departemen Teknik Elektro dan Informatika, Universitas Gadjah Mada; hanifah.suwardi@mail.ugm.ac.id, salima.nurrahma@mail.ugm.ac.id, anisaseptyaningcho@mail.ugm.ac.id,

*Korespondensi: imroatul.hudati@mail.ugm.ac.id

Abstract – *There are some unstable control systems, it can be an important problem in control, like systems in aerospace and flight. This can be studied simply in the ball and beam system. The ball and beam system uses an LQG (Linear Quadratic Gaussian) controller to determine the effect of stability and optimal system to reach the set point and the results of the slope angle on the beam at the set point. There is a combination of LQR with the element matrix parameters Q and R which can be searched using a trial and error technique with the condition that the Q matrix is a positive semidefinite while the R matrix is a positive definite matrix. As well as the use of gain Kalman filter as an estimator. Two experiments are given on the Q and R matrix elements which will be used in three distance/position displacement tests. The design of LQG on ball and beam systems is carried out in the MATLAB-Simulink software. Then the results of the angle of inclination of the beam (beam) obtained 14° to make the ball reach a set point of 10 cm, 17° for a set point of 20 cm, and 28° for a set point of 30 cm.*

Keywords – *ball and beam, angle, LQG, LQR, linearization*

Intisari – Sistem kontrol yang tidak stabil menjadi sebuah masalah yang penting dalam pengontrolan, seperti sistem dalam *aerospace* dan penerbangan. Hal ini dapat dipelajari secara sederhana pada sistem *ball and beam*. Pada sistem *ball and beam* digunakan pengontrol LQG (*linear quadratic gaussian*) untuk mengetahui pengaruh stabilitas maupun optimalnya sistem mencapai *set point* serta hasil kemiringan sudut pada balok (*beam*) pada titik *set point*. Terdapat kombinasi LQR dengan parameter matriks elemen Q dan R yang dapat dicari menggunakan teknik *trial and error* dengan syarat matriks Q ialah *semidefinite positive* sedangkan matriks R ialah matrik definit positif. Serta penggunaan *gain filter* Kalman sebagai *estimator*. Dilakukan dua eksperimen pada elemen matriks Q dan R yang akan digunakan pada tiga pengujian perpindahan jarak/posisi. Rancangan LQG pada sistem *ball and beam* dilakukan di *software* MATLAB-Simulink. Diperoleh hasil sudut kemiringan *beam* sebesar 14° untuk membuat *ball* mencapai di posisi *set point* 10 cm, 17° untuk *set point* 20 cm, dan 28° untuk *set point* 30 cm.

Kata kunci – *ball and beam, sudut, LQG, LQR, linierisasi*

I. PENDAHULUAN

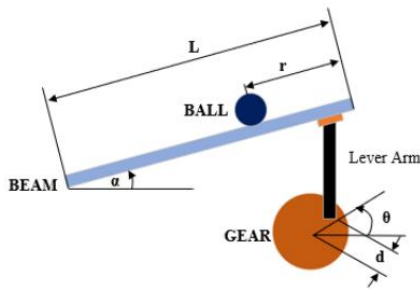
Terdapat beberapa jenis sistem kontrol, salah satunya adalah dalam aspek keseimbangan yang bertujuan untuk menjaga keseimbangan suatu objek terhadap objek lainnya. Sistem kontrol yang tidak stabil menjadi permasalahan dalam pengontrolan, baik sistem di *aerospace* dan penerbangan. Sistem *ball and beam* atau "*balancing a ball on beam*". bertujuan untuk mengontrol posisi bola untuk mencapai titik referensi atau *set point* dan menghilangkan gangguan dari eksternal maupun internal.

Beam and ball system merupakan alat yang umum digunakan untuk mempelajari sistem kendali dan memiliki berbagai metode kendali yang dapat diterapkan [1]. *Ball and beam system* merupakan sebuah sistem yang terdiri dari sebuah bola (*ball*) dan sebuah bidang segi empat atau balok (*beam*) dengan sensor diletakkan disalah satu sisi dari balok untuk mendeteksi posisi untuk dapat menyesuaikan di *set point* [2]. Sinyal pengontrolan dapat diturunkan dengan memberi *feedback* informasi dari posisi bola. Sinyal tegangan akan masuk ke motor *servo*, kemudian torsi yang dihasilkan oleh motor akan menggerakkan *beam* untuk berputar ke posisi atau sudut yang diinginkan [3]. Dengan demikian, bola dapat ditempatkan pada posisi yang diinginkan.

Pada sistem *ball and beam* digunakan pengontrol LQG (*linear quadratic gaussian*). Beberapa penelitian telah

menggunakan LQG di berbagai sistem seperti sistem suspensi, pendulum terbalik, dan sistem *ball and beam*. Penelitian sebelumnya yang membahas kontrol optimal pada sistem *ball and beam* menunjukkan bahwa metode kendali LQG memberikan respons yang baik karena dapat menjaga *measurement noise* dan dapat menstabilkan sistem dengan baik [4]. Terdapat pula yang menyatakan bahwa pengendali LQG mampu menjaga *robustness*, mengurangi *overshoot*, memperbaiki *error steady state*, dan mengembalikan nilai keluaran menuju *set point* setelah sistem mendapat gangguan. Hal ini terjadi karena pengendali tersebut memiliki filter Kalman yang berperan mengestimasi gangguan proses dan gangguan pengukuran [5].

Pada Gambar 1 merupakan diagram skematis dari sistem *ball and beam* yang mana sistem ini terdiri dari sebuah bidang segi empat (*beam*) dan sebuah bola (*ball*). Sistem *ball and beam* mengedepankan sistem yang stabil dan seimbang. Artikel ini membahas kontrol optimal LQG pada sistem *ball and beam* sebagai *tracking* keluaran sudut yang dihasilkan berdasarkan titik awal posisi *ball* pada *beam*. Pokok bahasan artikel ini mencakup model matematis sistem *ball and beam*, linierisasi, desain LQG pada sistem dengan menggunakan MATLAB-Simulink, dan hasil keluaran *step* serta analisis respons tiap percobaan posisi awal bola.



Gambar 1. Diagram skematis sistem ball and beam

II. METODOLOGI PENELITIAN

Perancangan kendali LQG memiliki beberapa tahapan yang meliputi:

- 1) Melakukan pemodelan matematis sistem
- 2) Linierisasi model matematis
- 3) Membangun *feedback regulator* (K)
Mencari *gain regulator* (K), sebelumnya sudah ditentukan besarnya matriks pembobot dan R serta mencari nilai P yang merupakan solusi dari persamaan aljabar Riccati. Matriks Q dan R dicari dengan teknik *trial and error* sampai didapatkan kinerja *gain regulator* yang sesuai keinginan.
- 4) Merancang *estimator* atau filter Kalman
Sesuai dengan tahapan perancangan telah diperoleh matriks A, B dan C pada persamaan *state space*. Selanjutnya, matriks Q dan R sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = [10]$$

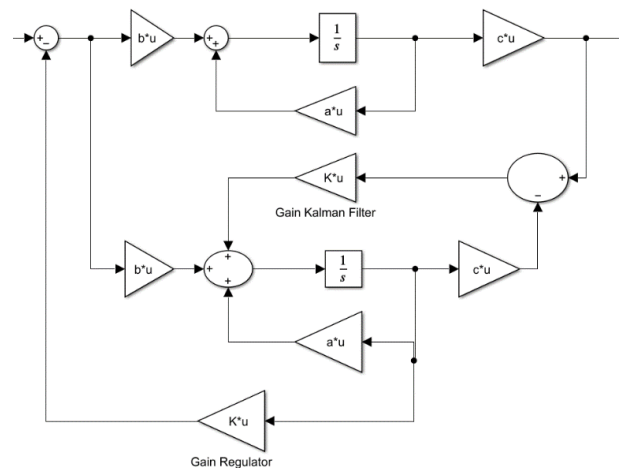
Diperoleh *gain regulator*:

$$K = [2,1605 \quad 0,8003 \quad 2,0386 \quad 0,4213]$$

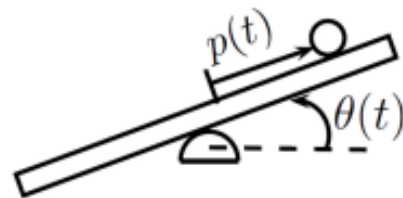
Serta telah diperoleh *gain filter* Kalman:

$$K_f = \begin{bmatrix} 10,9639 \\ 55,1032 \\ 30,0676 \\ 113,4881 \end{bmatrix}$$

Kemudian, rancangan blok diagram dilakukan untuk membuktikan hasil keluaran sistem berupa *step response*. Gambar 2 menunjukkan diagram blok LQG pada sistem ball and beam. Semua hasil matriks diperoleh menggunakan MATLAB. Untuk mencari gain regulator maupun gain Kalman dapat menggunakan *syntax*.



Gambar 2. Sistem LQG ball and beam



Gambar 3. Sistem ball and beam

III. MODEL MATEMATIS SISTEM BALL AND BEAM

A. Ball and Beam System Model

Terdapat beberapa metode untuk mencari persamaan dan model matematis sistem ball and beam. Teknik Lagrangian digunakan untuk mendapatkan persamaan dinamis pada sistem ball and beam. Metode Jacobian Linearization, digunakan untuk mendapatkan pendekatan yang linear terdapat persamaan dinamis di sekitar titik stabil. *State space* digunakan untuk memperoleh bentuk persamaan akhir pada sistem ball and beam seperti pada Gambar 3.

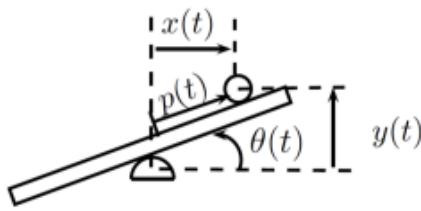
Bola menggelinding pada balok tanpa tergelincir dalam pengaruh gaya gravitasi. Balok berada pada posisi miring akibat torsi eksternal untuk mengontrol posisi bola pada balok. Koordinat umum yang menggambarkan sistem dinyatakan pada (1) dengan $p(t)$ adalah posisi bola pada balok dan $\theta(t)$ adalah sudut balok.

$$q(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Lagrangian dari suatu sistem adalah kuantitas yang didefinisikan pada (2).

$$L = K - U \tag{2}$$

Dengan K adalah energi kinetik dan U adalah energi potensial dari sistem. Untuk mendapatkan nilai K dan U , perlu definisikan koordinat Cartesius $x(t)$ dan $y(t)$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Koordinat Cartesius dan koordinat umum

Energi kinetik pada *beam* dihitung menggunakan (3).

$$K_1 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

Dengan J merupakan momen inersia. Kemudian energi kinetik pada bola dihitung menggunakan (4).

$$K_2 = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}_b + \frac{1}{2} m v_b^2 \quad (4)$$

Dengan $\dot{\theta}_b$ kecepatan sudut bola dan v_b adalah kecepatan linier bola. Nilai $\dot{\theta}_b$ dapat diekspresikan menjadi bentuk koordinat umum sebagai (5).

$$\dot{\theta}_b = \frac{p}{r} \quad (5)$$

Dengan r merupakan jari-jari bola. Dapat diekspresikan v_b ke bentuk koordinat umum pada (6).

$$v_b^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (6)$$

$$x = p \cos \theta \quad (7)$$

$$\dot{x} = \dot{p} \cos \theta - p \dot{\theta} \sin \theta \quad (8)$$

$$\dot{x}^2 = \dot{p}^2 \cos^2 \theta + p^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \quad (9)$$

$$y = p \sin \theta \quad (10)$$

$$\dot{y} = \dot{p} \sin \theta + p \dot{\theta} \cos \theta \quad (11)$$

$$\dot{y}^2 = \dot{p}^2 \sin^2 \theta + 2p \dot{p} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + p^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \quad (12)$$

Substitusi (9) dan (12) ke (6), diperoleh (13).

$$v_b^2 = \dot{p}^2 + p^2 \dot{\theta}^2 \quad (13)$$

Substitusi (5) dan (13) ke dalam (4), dapat diperoleh energi kinetik pada bola dalam bentuk koordinat umum (14).

$$K_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{J_b}{r^2} + m \right) \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m p^2 \dot{\theta}^2 \quad (14)$$

Energi potensial sistem, yaitu (15).

$$U = m g p \sin \theta \quad (15)$$

Substitusi (3) dan (14) ke (2), diperoleh bentuk Lagrangian untuk sistem ini yang ditunjukkan pada (16).

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{J_b}{r^2} + m \right) \dot{p}^2 + \frac{1}{2} (m p^2 + J) \dot{\theta}^2 - m g p \sin \theta \quad (16)$$

Persamaan pertama Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \left(\frac{J_b}{r^2} + m \right) \dot{p} \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = \left(\frac{J_b}{r^2} + m \right) \ddot{p} \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = m p \dot{\theta}^2 - m g \sin \theta \quad (20)$$

Substitusi (18), (19) dan (20) ke (17), diperoleh persamaan pertama untuk gerak pada sistem *ball and beam* (21).

$$\left(\frac{J_b}{r^2} + m \right) \ddot{p} + m g \sin \theta - m p \dot{\theta}^2 \quad (21)$$

Persamaan kedua *Lagrange* ditunjukkan pada (22).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (22)$$

Dengan τ adalah torsi eksternal yang diaplikasikan ke *beam*. Diperoleh persamaan menggunakan pendekatan yang sama.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (m p^2 + J) \dot{\theta} \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2 m p \dot{p} \dot{\theta} + (m p^2 + J) \ddot{\theta} \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g p \cos \theta \quad (25)$$

Substitusi (24) dan (25) ke (22), diperoleh persamaan kedua untuk gerak pada sistem *ball and beam*.

$$(m p^2 + J) \ddot{\theta} + 2 m p \dot{p} \dot{\theta} + m g p \cos \theta = \tau \quad (26)$$

Persamaan (21) dan (26) merupakan persamaan gerak untuk sistem *ball and beam*.

B. Linear State Variable Representation

Persamaan gerak yang telah diperoleh untuk sistem *ball and beam* dapat ditulis dalam representasi *state variable*. Pertama mendefinisikan *state vector* seperti pada (27).

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

State vector terdiri dari variabel yang diperlukan untuk menentukan respons sistem yang diberikan *input* dan kondisi saat ini [6]. Kemudian persamaan gerak dapat dituliskan dengan *variable state vector* pada (16).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{m(x_1 x_4^2 - g \sin x_3)}{\frac{J_b}{r^2} + m} \\ x_4 \\ -\frac{2m x_1 x_2 x_4 - m g x_1 \cos x_3 + \tau}{(m x_1^2 + J)} \end{bmatrix} = f(x, \tau) \quad (28)$$

Titik operasi dapat didefinisikan dengan posisi bola p_0 dan kecepatan, sudut serta kecepatan sudut *beam* bernilai nol.

$$x_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Dapat didefinisikan juga *input* operasi yang diperlukan untuk mempertahankan titik operasi ini, diperoleh torsi dari (28) ke nol kemudian mengevaluasi pada titik operasi ini.

$$u_\tau = m g p_0 \quad (30)$$

Persamaan torsi yang diperlukan untuk mempertahankan bola tetap pada posisi p_0 . Persamaan Jacobian dari sisi kanan berhubungan dengan hasil *state vector* x .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m\dot{x}_4}{r^2+m} & 0 & \frac{-mg\cos x_3}{r^2+m} & \frac{2mx_1x_4}{r^2+m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & -\frac{2mx_1x_4}{mx_1^2+J} & \frac{mgx_1\sin x_3}{mx_1^2+J} & -\frac{2mx_1x_2}{mx_1^2+J} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Dengan,

$$\frac{f_4}{x_1} = \frac{(-2mx_2x_4 - mg\cos x_3)(mx_1^2 + J) - (-2mx_1x_2x_4 - mgx_1\cos x_3 + \tau)}{(mx_1^2 + J)^2} \quad (32)$$

Menghitung titik operasi pada representasi *state variable* matriks A, B dan C

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \tau_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{r^2+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{mp_0+J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0, \tau_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (35)$$

Dengan menggunakan matriks tersebut, maka dapat diperoleh bentuk representasi *state space* sebagai berikut [7].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (36)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (37)$$

Substitusi (33) dan (34) dengan parameter sistem *ball and beam* pada Tabel 1. Sehingga dapat dihasilkan *state space* matriks sebagai berikut. Bentuk representasi *state space* ini, sistem dapat dianalisis dan pengendali dapat dirancang.

Tabel 1. Parameter sistem *ball and beam*

Parameter	Jumlah
(m) Massa bola	0,11 kg
(L) panjang balok	0,3 m
(r) Jari-jari bola	0,015 m
(g) Percepatan gravitasi	9,8 m/s ²
(J) Momen Inersia balok	19 × 10 ⁻³ kg.m ²
(J _b) Momen Inersia bola	9,99 × 10 ⁻⁶ kg.m ²
(p ₀) Posisi bola	m
(α) sudut servo	°
(θ) sudut balok	°

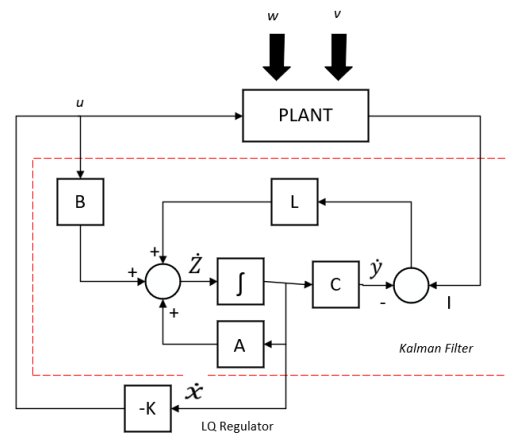
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -56,8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 52,6 \end{bmatrix} u(t) \quad (38)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (39)$$

IV. DESAIN KENDALI LQG SISTEM BALL AND BEAM

Kendali LQG sebagai teknik kendali modern yang mengombinasikan kendali LQR dengan filter Kalman sebagai *estimator variable* keadaannya sehingga dapat diaplikasikan dalam bentuk *state-space* yang digunakan untuk mendesain dinamik *optimal regulator* [8].

Filter Kalman dapat mengeliminasi gangguan yang terdapat pada LQG, yaitu *gaussian white noise* [9]. *Gaussian white noise* merupakan sinyal acak yang memiliki intensitas yang sama dengan frekuensi yang berbeda yang berpengaruh terhadap respons sistem [10]. Gambar 5 menunjukkan diagram blok LQG.



Gambar 5. Diagram blok LQG

Dengan model *state space* LQG:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \quad (40)$$

$$y(t) = Cx(t) + w(t) \quad (41)$$

Dengan,

u	sinyal kendali <i>input</i>
y	<i>output</i> proses
w	Gangguan proses
v	<i>white noise</i>
A	matriks <i>plant</i>
B	matriks kendali <i>input</i>
C	matriks pengukuran.
K	<i>gain feedback regulator</i>
K_f	<i>gain Kalman</i>

Dengan penerapan *optimal feedback* yang dinyatakan dalam bentuk blok diagram dapat dinyatakan bahwa untuk mencari sinyal kontrol optimal u diperlukan *gain* K dan *gain* K_f yang optimal [11]. Agar sistem tetap stabil, diperlukan penguatan pengendali dan *estimator* yang stabil pula.

Nilai K dan K_f dapat diperoleh secara terpisah. Penentuan nilai K dilakukan dengan adanya sistem yang sudah ditentukan yaitu dengan metode LQR. Nilai penguat regulator (*gain* K) ditunjukkan pada (42).

$$K = R_C^{-1} B^T S \quad (42)$$

Untuk mencari nilai S dapat menggunakan persamaan Riccati (43).

$$A^T S + SA - SBR_C^{-1} B^T S + Q_C = 0 \quad (43)$$

Dengan Q_C adalah matriks *positive-definite* (atau *positive-semidefinite*) Hermitian atau matriks simetris riil dan R_C adalah matriks *positive-definite* Hermitian atau matriks simetris riil [12]. Hubungan Q_C untuk menentukan matriks keadaan dan R untuk menentukan matriks kendali.

Sedangkan penentuan nilai K_f optimal dilakukan dengan sistem bersifat yang belum ditentukan kejadiannya (belum ditentukan) yaitu indeks performansi variansi kesalahan minimum atau dapat dituliskan [13]:

$$J(t_0) = \frac{1}{2} S(T) x^2(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (Qx^2 + Ru^2) \quad (44)$$

Filter Kalman merupakan *estimator* optimal yang berfungsi mengestimasi keadaan dan menyaring *noise* [6]. Proses *estimator* dengan menggunakan bentuk *feedback control filter* mengestimasi keadaan pada suatu waktu dan kemudian memperoleh *feedback* dalam bentuk *noise* [14]. Dengan demikian, persamaan untuk filter Kalman terbagi menjadi dua kelompok, yaitu:

- *Time update eq.*
Bertanggung jawab untuk memproyeksikan ke depan (dalam waktu).
- *Measurement update eq.*

Bertanggung jawab atas *feedback* yaitu dengan memasukkan pengukuran yang baru ke dalam estimasi apriori untuk mendapatkan estimasi posteriori yang lebih banyak [14].

Estimator bekerja dengan menekan nilai *error covariant* sekecil mungkin [13]. Maka, indeks performansinya atau *cost function*-nya dapat ditulis:

$$J = E\{[\hat{x} - x]^T [\hat{x} - x]\} \quad (45)$$

Dengan \hat{x} adalah nilai estimasi dari variabel x dalam fungsi waktu. Estimasi *state variable* \hat{x} diperoleh dari sistem dinamik filter Kalman sebagai berikut:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y}) \quad (46)$$

Sedangkan, untuk menentukan penguatan filter Kalman pada *estimator* digunakan (47).

$$K_f = PC^T R_f^{-1} \quad (47)$$

Matriks P diperoleh dari persamaan Riccati (48) berikut.

$$0 = PA^T + AP - PC^T R_f^{-1} CP + GQ_f G^T \quad (48)$$

Dengan asumsi matriks A dan B terkendali dan C teramat $Q_f \geq 0, R_f > 0$, maka Kalman filter akan stabil. Matriks Q_f dan R_f adalah *noise covariance*, identifikasi *noise covariance* adalah tugas yang memungkinkan untuk implementasi *tuning* pada *state estimator* dan kineja pengendalian. Dengan *noise* proses $w(t) \sim (0, Q_f)$ dan pengukuran $n(t) \sim (0, V^2 R_f)$ adalah *white noise*.

V. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Sistem *ball and beam* memiliki masukan posisi awal serta diberikan *set point* atau posisi akhir yang ditentukan. Keluaran sistem yang dihasilkan adalah sudut sesuai posisi *reference point*. Namun, perlu digarisbawahi bahwa penelitian ini melakukan percobaan secara eksperimen menggunakan MATLAB-Simulink tanpa purwarupa (*model-based*) untuk memastikan perhitungan dengan metode LQG mampu mengendalikan dengan stabil pada sistem *ball and beam*.

Diberikan beberapa percobaan berdasarkan *initial position point*. Bola diletakan secara acak sepanjang balok tersebut, dengan beberapa *set point* yang ditetapkan serta *trial dan error* dalam pencarian matriks Q dan R . Kemudian, *step response* pada masing-masing percobaan dianalisis.

A. Pengujian 1: Set Point 10 cm dan Initial Point 0 cm

Pengujian sistem *ball and beam* dilakukan dengan memberikan *set point* tetap bernilai 10 cm. Hasil respons sistem ditunjukkan pada Gambar 6. Berdasarkan Gambar 6, sistem menghasilkan respons dengan *overshoot* sebesar 19,9%, *rise time* selama 0,48 s, *settling time* selama 3,7 s, *time delay* selama 0,62 s, dan *peak time* selama 1,22 s. *Steady state error* dihitung dengan (49).

$$Ess = Setpoint - X_{ss} = 10 - 9,148 = 0,852 \quad (49)$$

Steady state error merupakan perbedaan jarak antara keluaran sistem (X_{ss}) dan posisi *set point* (posisi yang diinginkan).

Nilai keluaran sistem (X_{ss}) dapat diidentifikasi melalui hasil respons sistem serta dapat diidentifikasi hasilnya setelah parameter *settling time* terukur. Pada pengujian diperoleh X_{ss} sebesar 9,148, dapat dilihat Gambar 6. Garis merah ditujukan posisi *set point* dan garis hitam ditujukan untuk hasil response sistem. Secara umum, sistem yang stabil akan memiliki *steady state error* sama dengan nol.

Perpindahan jarak yang diberikan dari *initial point* 0 cm hingga *set point* 10 cm menghasilkan sudut balok yang dipengaruhi oleh sudut motor *servo* pula. Diperoleh sudut sekitar 14° untuk mencapai *set point* 10 cm.

B. Pengujian 2: Set Point 20 cm dan Initial Point 12 cm

Pengujian sistem *ball and beam* dilakukan dengan memberikan *set point* tetap bernilai 20 cm. Hasil respon sistem ditunjukkan pada Gambar 7. Berdasarkan Gambar 7, sistem menghasilkan respons dengan *overshoot* sebesar 21,341%, *rise time* selama 0,486 s, *peak time* selama 1,19 s, *settling time* selama 4,2 s, *delay time* selama 0,6 s. *Steady state error* dihitung dengan (50) dengan hasil X_{ss} sebesar 18,34.

$$Ess = Setpoint - X_{ss} = 20 - 18,34 = 1,66 \quad (50)$$

Perpindahan jarak pada pengujian ini menghasilkan sudut maksimal sekitar 17° karena respons sinyal pada Gambar 7 menunjukkan sifat *underdamp case*. Akibatnya, untuk mencapai keadaan stabil, sudut akan terus berkurang hingga sesuai dengan *set point*.

C. Pengujian 3: Set Point 30 cm dan Initial Point 27 cm

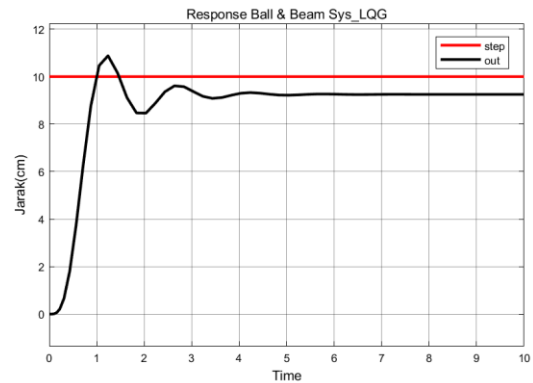
Pengujian sistem *ball and beam* dilakukan dengan memberikan *set point* tetap bernilai 30 cm. Hasil respons sistem ditunjukkan pada Gambar 8. Berdasarkan Gambar 8, sistem menghasilkan respons dengan *overshoot* sebesar 24,37%, dan *rise time* selama 0,496 s, *settling time* selama 6,7 s, *time delay* selama 0,68 s, *time peak* selama 1,2 s. *Steady state error* dihitung dengan (51).

$$EEss = Setpoint - X_{ss} = 30 - 27,43 = 2,58 \quad (51)$$

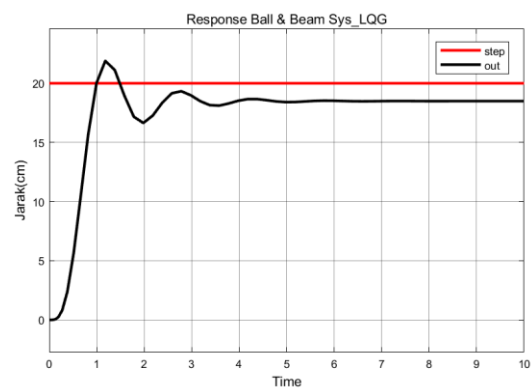
Diperoleh perpindahan jarak pada pengujian sebesar 28° . Dari tiga percobaan tersebut dapat diringkas kembali informasi *step response*, sebagai berikut.

Tabel 2. Hasil respons step dengan eksperimen matriks Q dan R pertama pada ketiga percobaan

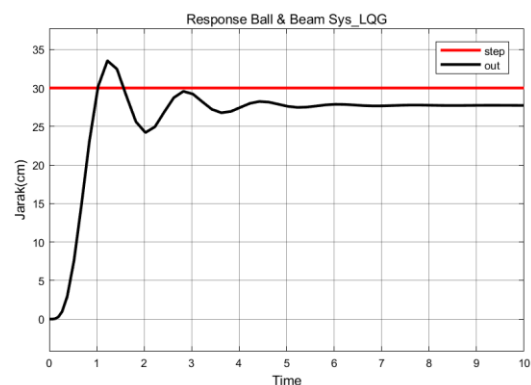
	Matriks		Karakteristik Respons Transient				
	Q	R	Mp (%)	RT (s)	ST (s)	Amp	Ess
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	[200]	19,9	0,5	3,7	9,15	0,85
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	[200]	21,3	0,5	4,2	18,34	1,66
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	[200]	24,3	0,51	6,7	27,43	2,58



Gambar 6. Respons sistem *ball and beam* dengan *set point* 10 cm dan *initial point* 0 cm



Gambar 7. Respons sistem *ball and beam* dengan *set point* 20 cm dan *initial point* 12 cm



Gambar 8. Respons sistem *ball and beam* dengan *set point* 30 cm dan *initial point* 27 cm

Tabel 3. Hasil respons step dengan eksperimen matriks Q dan R kedua pada ketiga percobaan

	Matriks		Karakteristik Respons Transient				
	Q	R	Mp (%)	RT (s)	ST (s)	Amp	Ess
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$	[500]	13	0,6	3,1	9,21	0,79
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$	[500]	13	0,6	3	18,4	1,6
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$	[500]	16	0,56	3,1	27,64	2,36

Berdasarkan Tabel 2, matriks Q dan R didapatkan secara eksperimen, serta diberikan tiga percobaan yang masing-masing memiliki *setpoint* dan *initial point* yang berbeda. *Range setpoint* yang digunakan adalah 10 cm s.d. 30 cm sedangkan *initial point* diberikan secara acak. Begitu pun dengan Tabel 3 [15].

Bila dibandingkan hasilnya yang lebih baik ada pada Tabel 3. Nilai *overshoot* mengalami penurunan dibandingkan Tabel 2. *Amplitude* masing-masing percobaan di Tabel 3 mengalami peningkatan hampir menyentuh *set point*. Matriks R bila ditambahkan nilainya akan menyebabkan *overshoot* menurun dan mengurangi osilasi. Kemudian, matriks Q bila diubah nilainya, dengan syarat *semidefinite-positive*, maka menghasilkan respons yang osilasinya berlebihan, tetapi dapat mendekati *steady state* [16].

VI. SIMPULAN

Pada penelitian ini dapat disimpulkan bahwa terdapat desain kendali *linear quadratic* lainnya selain LQR yaitu LQG. Metode pengendali ini ialah kombinasi metode LQR serta filter Kalman sebagai *estimator* yang berfungsi untuk mengestimasi keadaan dan menyaring gangguan. Percobaan ini dilakukan untuk mengetahui apakah metode kendali ini mampu mengendalikan sistem *ball and beam* sehingga dapat mencapai *set point*. Hasilnya, semua percobaan stabil, tetapi tidak mampu mencapai *set point*. Namun, bila dilakukan eksperimen *trial and error* terhadap nilai Q dan R kembali, maka respons sistem dimungkinkan akan stabil dan optimal mencapai *set point*.

PENELITIAN LANJUTAN

Saran pengembangan penelitian dalam sistem *ball and beam* adalah menggunakan *real plant* agar dapat mengetahui sistem apakah stabil maupun optimal bila menggunakan metode kendali LQG.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] N. O. Dewi and P. W. Rusumamto, "Perancangan Sistem Pengendalian Ball and Beam Menggunakan Perangkat Lunak LabVIEW Berbasis Fuzzy Logic Controller," *Jurnal Teknik Elektro*, vol. 8, no. 2, 2019.
- [2] D. Martinez and F. Ruiz, "Nonlinear model predictive control for a Ball&Beam," *2012 IEEE 4th Colombian Workshop on Circuits and Systems, CWCAS 2012 - Conference Proceedings*, no. 2, 2012, doi: 10.1109/CWCAS.2012.6404073.
- [3] T. Trapp and W. Selby, "Ball and Beam Balance Final Report," 2009.
- [4] R. Soni and Sathans, "Optimal control of a ball and beam system through LQR and LQG," *Proceedings of the 2nd International Conference on Inventive Systems and Control, ICISC 2018*, no. Icisc, pp. 179–184, 2018, doi: 10.1109/ICISC.2018.8399060.
- [5] J. Dofela, "DESAIN KENDALI OPTIMAL METODE LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG) UNTUK PENGENDALIAN SISTEM SUSPENSİ KENDARAAN SEPEREMPAT." Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2019.
- [6] A. Srivastava and B. Pratap, "Nonlinear robust observers for ball and beam system: A comparative analysis," *2015 2nd International Conference on Recent Advances in Engineering and Computational Sciences, RA ECS 2015*, no. December, pp. 22–27, 2016, doi: 10.1109/RA ECS.2015.7453281.
- [7] "Ball & Beam : System Modelling," *Control Tutorials for MATLAB & SIMULINK*.
- [8] T. TAUFİKURRAHMAN, "DESAIN KONTROLER LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG) PADA SISTEM PENDULUM TERBALIK." University of Muhammadiyah Malang, 2017.
- [9] F. L. Q. Regulator, "Cerita singkat tentang Linear Quadratic Regulator".
- [10] F. L. Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation (Digital Design & Implementation)*. Prentice Hall, 1992.
- [11] K. Ryu and Y. Oh, "Balance control of ball-beam system using redundant manipulator," *2011 IEEE International Conference on Mechatronics, ICM 2011 - Proceedings*, pp. 403–408, 2011, doi: 10.1109/ICMECH.2011.5971319.
- [12] T. TAUFİKURRAHMAN, "DESAIN KONTROLER LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG) PADA SISTEM PENDULUM TERBALIK." University of Muhammadiyah Malang, 2017.
- [13] J. Dofela, "DESAIN KENDALI OPTIMAL METODE LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG) UNTUK PENGENDALIAN SISTEM SUSPENSİ KENDARAAN SEPEREMPAT." Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 2019.
- [14] G. Welch and G. Bishop, "An introduction to the Kalman filter," 1995.
- [15] D. Kinoshita and K. Yoshida, "Stabilizing Control for a ball and beam system considering the restricted beam angle and ball speed," *2019 58th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan, SICE 2019*, pp. 170–176, 2019, doi: 10.23919/SICE.2019.8859847.
- [16] K. T. Lee, S. Y. Oh, and H. L. Choi, "Bounded control of a ball and beam system in the absence of feedback," *International Conference on Control, Automation and Systems*, vol. 2017-October, no. Iccas, pp. 1167–1169, 2017, doi: 10.23919/IC CAS.2017.8204389.