Jurnal Matematika Thales (JMT), 2024
Vol. 06 No.01

FUNGSI BAIRE-1 STABIL YANG DIBANGUN OLEH FUNGSI-CL TERGENERALISASI (STABLE BAIRE-1 FUNCTIONS GENERATED BY GENERALIZED CL-FUNCTIONS)

M HUSEN AL FARISY*, ATOK ZULIJANTO

Abstract. In this paper we prove that a function of two variables which is continuous with respect to the first variable and generalized Lipschitz with respect to the second variable (in short generalized CL-functions) may generate a stable Baire-1 function.
Keywords: Stable Baire-1 functions, Generalized Lipschitz functions, generalized CL-functions.

Abstrak. Dalam makalah ini dibuktikan bahwa fungsi dua variabel yang kontinu terhadap variabel pertama dan Lipschitz tergeneralisasi terhadap variabel kedua (disingkat fungsi-CL tergeneralisasi) dapat membangun fungsi Baire-1 stabil.
Kata-kata kunci: Fungsi Baire-1 stabil, fungsi Lipschitz tergeneralisasi, fungsi-CL tergeneralisasi.

1. PENDAHULUAN

Diberikan ruang metrik X, Y, dan Z. Fungsi $f : X \times Y \to Z$ dikatakan kontinu terpisah jika untuk sebarang $(x, y) \in X \times Y$ berlaku $f(x, \cdot) : Y \to Z$ dan $f(\cdot, y) : X \to Z$ kontinu. Telah diketahui bahwa setiap fungsi kontinu $f : X \times Y \to Z$ merupakan fungsi kontinu terpisah, sebaliknya belum tentu berlaku. Baire [1] membuktikan setiap fungsi kontinu terpisah bernilai real merupakan fungsi Baire-1. Fungsi $g : X \to Y$ disebut diagonal fungsi $f : X \times X \to Y$ jika memenuhi $g(x) = f(x, x)$ untuk semua $x \in X$. Baire [1] juga membuktikan bahwa diagonal fungsi kontinu terpisah dua variabel yang bernilai real merupakan fungsi Baire-1. Penelitian yang dilakukan oleh Baire [1] dilanjutkan oleh Lebesgue [8] untuk kasus variabel lebih dari dua. Selain Baire [1] dan

---

2020 Mathematics Subject Classification: 54C08, 54C05, 26A16

Lebesgue [8], banyak peneliti yang meneliti tentang fungsi kontinu terpisah dan fungsi Baire-1, di antaranya [3], [5], [7], dan [10].

Karlova [7] meneliti diagonal dari analogi fungsi kontinu terpisah dengan mengganti sifat kekontinuan terhadap variabel kedua menjadi Lipschitz atau terdiferensial Fréchet. Fungsi dua variabel yang kontinu terhadap variabel pertama dan Lipschitz terhadap variabel kedua disebut fungsi-CL. Karlova [7] memberikan karakterisasi diagonal fungsi-CL dengan menggunakan fungsi Baire-1 stabil, sebagaimana tertulis dalam teorema berikut.

Teorema 1. ([7], *Theorem* 5.5) *Diberikan ruang metrik* (X, d_X)*, ruang metrik terhubung setara* (Z, λ) *dengan* λ *Lipschitz terhadap variabel ketiga,* $Z \in \sigma AE(X)$*, dan* $g : X \to Z$*. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.*

(i) *Fungsi* g *merupakan fungsi Baire-1 stabil.*
(ii) *Terdapat fungsi* $f : X \times X \to Z$ *dengan diagonal* g *yang kontinu terhadap variabel pertama dan Lipschitz terhadap variabel kedua.*
(iii) *Terdapat fungsi* $f : X \times X \to Z$ *dengan diagonal* g *yang kontinu terhadap variabel pertama dan Lipschitz titik demi titik terhadap variabel kedua pada* $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$*.*

Di sisi lain, Miculescu [9] memperumum definisi fungsi Lipschitz menjadi Lipschitz terhadap suatu fungsi, sebagai berikut: fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) disebut fungsi Lipschitz terhadap fungsi $\ell : X \to X$, jika terdapat $M > 0$ sehingga berlaku $d_Y(f(x), f(y)) \leq M d_X(\ell(x), \ell(y))$ untuk semua $x, y \in X$. Fungsi Lipschits terhadap suatu fungsi yang didefinisikan oleh Miculescu [9] tersebut, dinamakan fungsi Lipschitz tergeneralisasi. Definisi tersebut memungkinkan untuk memperumum fungsi-CL menjadi fungsi yang kontinu terhadap variabel pertama dan Lipschitz tergeneralisasi terhadap variabel kedua, yang selanjutnya dinamakan fungsi-CL tergeneralisasi. Pada artikel ini, sebagian Teorema 1, yaitu (iii) $\Rightarrow$ (i) akan dibuktikan untuk fungsi-CL tergeneralisasi. Lebih tepatnya, dalam artikel ini dibuktikan sifat berikut: Diberikan ruang metrik (X, d_X), ruang metrik terhubung setara (Z, λ) dengan $Z \in \sigma AE(X)$, dan fungsi kontinu bijektif $\ell : X \to X$. Jika fungsi $f : X \times X \to Z$ memenuhi

$$d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(x))) \leq a d_Z(f(x, y), f(x, x))$$

untuk suatu $a \geq 1$, dan untuk semua $(x, y) \in X \times X$ fungsi $f(\cdot, y)$ kontinu dan $f(x, \cdot)$ Lipschitz terhadap fungsi $\ell : X \to X$ pada $\Delta_\ell = \{(x, \ell(x)) : x \in X\}$, maka fungsi $h : X \to Z$ dengan $h(x) = f(x, \ell(x))$ fungsi Baire-1 stabil. Diperhatikan bahwa jika ℓ adalah fungsi identitas dan $a = 1$, maka fungsi f ini akan menjadi fungsi f di Teorema 1 bagian (iii).

2. FUNGSI YANG DIBANGUN OLEH FUNGSI-CL TERGENERALISASI

Sebelum dibuktikan bahwa fungsi Baire-1 stabil dapat dibangun oleh fungsi-CL tergeneralisasi, terlebih dahulu diberikan definisi fungsi Lipschitz tergeneralisasi dan definisi ruang terhubung setara (*equiconnected spaces*).

Definisi 2. ([9]) *Diberikan ruang metrik* (X, d_X) *dan* (Y, d_Y)*. Fungsi* $f : X \to Y$ *dikatakan Lipschitz terhadap fungsi* $\ell : X \to X$ *pada* $A \subseteq X$*, apabila terdapat konstanta* $L > 0$ *sehingga*

$$d_Y\left(f(x), f(y)\right) \leq L d_X\left(\ell(x), \ell(y)\right)$$

untuk semua $x, y \in A$*.*

Definisi 3. ([7]) *Diberikan ruang topologi* X *dan fungsi kontinu* $\lambda : X \times X \times [0,1] \to X$*. Pasangan* (X, λ) *disebut ruang terhubung setara apabila untuk semua* $x, y \in X$ *dan* $t \in [0,1]$ *berlaku:*

(1) $\lambda(x, y, 0) = x$;
(2) $\lambda(x, y, 1) = y$;
(3) $\lambda(x, x, t) = x$.

Selanjutnya, diberikan teorema yang telah dibuktikan oleh Karlova [7] untuk membuktikan Teorema 6 sebagai salah satu hasil di dalam artikel ini.

Teorema 4. ([7], *Proposition* 4.1) *Diberikan ruang topologi* X*, ruang metrik* (Y, d_Y) *dan* (Z, d_Z)*, fungsi kontinu* $g : X \to Y$*, dan* $C, \delta > 0$*. Jika fungsi* $f : X \times Y \to Z$ *kontinu terhadap variabel pertama dan untuk setiap* $x \in X$ *dan* $y \in Y$ *dengan* $d_Y(y, g(x)) < \delta$ *berlaku*

$$d_Z\left(f(x,y), f(x, g(x))\right) \leq C d_Y\left(y, g(x)\right),$$

maka fungsi $h : X \to Z$ *dengan* $h(x) = f(x, g(x))$ *kontinu.*

Pada teorema selanjutnya, yaitu Teorema 6, ditunjukkan fungsi-CL tergeneralisasi dengan syarat tertentu merupakan fungsi kontinu-σ. Terlebih dahulu diberikan definisi fungsi kontinu-σ yang definisinya dapat dilihat di [2] dan [4].

Definisi 5. ([4]) *Diberikan ruang topologi* X *dan* Y*. Fungsi* $f : X \to Y$ *dikatakan kontinu-*σ *jika terdapat* $\mathcal{C}$ *liput tertutup terhitung* X *sehingga* $f|_C$ *kontinu untuk setiap* $C \in \mathcal{C}$*.*

Setelah diberikan definisi fungsi kontinu-σ, akan ditunjukkan eksistensi fungsi kontinu-σ yang dibangun oleh fungsi-CL tergeneralisasi.

Teorema 6. *Diberikan ruang topologi* X*, ruang metrik* (Y, d_Y) *dan* (Z, d_Z)*, fungsi kontinu* $g : X \to Y$*, fungsi kontinu bijektif* $\ell : Y \to Y$*, dan fungsi* $f : X \times Y \to Z$ *sehingga*

$$d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(g(x)))) \leq a d_Z(f(x,y), f(x, g(x)))$$

untuk suatu $a \geq 1$*. Jika untuk sebarang* $(x, y) \in X \times Y$ *fungsi* $f(\cdot, y)$ *kontinu dan* $f(x, \cdot)$ *Lipschitz terhadap fungsi* ℓ *pada* $E = \{(x, \ell(g(x))) : x \in X\}$*, maka fungsi* $h : X \to Z$ *dengan* $h(x) = f(x, \ell(g(x)))$ *merupakan fungsi kontinu-*σ*.*

Bukti. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, lambang A_n menyatakan himpunan semua $x \in X$ sehingga untuk setiap $y \in Y$ dengan $d_Y(\ell(y), \ell(g(x))) < \frac{1}{n}$ berlaku

$$d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(g(x)))) \le n d_Y(\ell(y), \ell(g(x))).$$

Diambil sebarang $n \in \mathbb{N}$, pertama akan ditunjukkan $\overline{A_n} \subseteq A_{2n}$. Diambil sebarang $x_0 \in X \setminus A_{2n}$, akan dibuktikan $x_0 \in X \setminus \overline{A_n}$. Dinamakan $y_0 = g(x_0)$. Karena $x_0 \in X \setminus A_{2n}$, maka dapat dipilih $y \in Y$ dengan $\ell(y) \neq \ell(y_0)$ sehingga

$$d_Y(\ell(y), \ell(y_0)) < \frac{1}{2n}$$

dan

$$d_Z(f(x_0, \ell(y)), f(x_0, \ell(y_0)) > 2n d_Y(\ell(y), \ell(y_0)).$$

Selanjutnya, didefinisikan fungsi $\alpha_y : X \to \mathbb{R}$ dan $\beta_y : X \to \mathbb{R}$ dengan

$$\alpha_y(x) = d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(y_0)))$$

dan

$$\beta_y(x) = d_Y(\ell(y), \ell(g(x))).$$

Karena metrik merupakan fungsi kontinu dan $f(\cdot, y)$ kontinu untuk sebarang $y \in Y$, maka α_y dan β_y kontinu pada X. Karena $\beta_y(x_0) > 0$, maka fungsi $\varphi_y : X \to \mathbb{R}$ dengan

$$\varphi_y(x) = \frac{\alpha_y(x)}{\beta_y(x)}$$

kontinu di x_0. Akibatnya terdapat U_1 persekitaran x_0 sehingga untuk semua $x \in U_1$ berlaku

$$\varphi_y(x) = \frac{d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(y_0)))}{d_Y(\ell(y), \ell(g(x)))} > 2n.$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa fungsi $\psi_y : X \to \mathbb{R}$ dengan

$$\psi_y(x) = d_Y(\ell(g(x)), \ell(y_0)) - d_Y(\ell(y), \ell(g(x)))$$

kontinu di titik x_0. Karena ψ_y kontinu di x_0 dan $\psi_y(x_0) < 0$, maka terdapat U_2 persekitaran x_0 sehingga untuk setiap $x \in U_2$ berlaku

$$d_Y(\ell(g(x)), \ell(y_0)) < d_Y(\ell(y), \ell(g(x))).$$

Karena g kontinu di x_0 dan $\ell : Y \to Y$ kontinu, maka terdapat U_3 persekitaran x_0 sehingga untuk setiap $x \in U_3$ berlaku

$$d_Y(\ell(g(x)), \ell(y_0)) < \frac{1}{2n}.$$

Selanjutnya, dinamakan $U_0 = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ dan akan dibuktikan $U_0 \cap A_n = \emptyset$.

Diambil sebarang $x \in U_0$. Perhatikan bahwa

$$d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(y_0))) \le d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(g(x)))) + d_Z(f(x, \ell(g(x))), f(x, \ell(y_0))).$$

Karena itu terdapat $y^* \in \{\ell(y), \ell(y_0)\}$ sehingga

$$d_Z(f(x, y^*), f(x, \ell(g(x)))) \ge \frac{1}{2} d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(y_0))).$$

Diperhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned}d_Y(\ell(y),\ell(g(x))) &\leq d_Y(\ell(y),\ell(y_0)) + d_Y(\ell(y_0),\ell(g(x)))\\ &< \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

dan $d_Y(\ell(y_0),\ell(g(x))) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. Karena itu

$$d_Y(y^*,\ell(g(x))) < \frac{1}{n}$$

dan

$$\frac{d_Z(f(x,y^*),f(x,\ell(g(x))))}{d_Y(y^*,\ell(g(x)))} \geq \frac{1}{2}\frac{d_Z(f(x,\ell(y)),f(x,\ell(y_0)))}{d_Y(\ell(y),\ell(g(x)))} = \frac{1}{2}\varphi_y(x) > n.$$

yang berarti $U_0 \cap A_n = \emptyset$. Jadi $\overline{A_n} \subseteq A_{2n}$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan $F_n = \overline{A_n}$. Karena $F_n \subseteq A_{2n}$, maka berdasarkan Teorema 4 diperoleh $h|_{F_n}$ kontinu.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Berdasarkan definisi F_n, jelas bahwa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq X$. Diambil sebarang $x \in X$, akan dibuktikan terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $x \in F_n$. Karena $f(x,\cdot) : Y \to Z$ Lipschitz terhadap fungsi ℓ pada $E = \{(x,\ell(g(x))) : x \in X\}$, maka terdapat $L > 0$ sehingga untuk semua $y \in Y$ berlaku

$$d_Z(f(x,y),f(x,g(x))) \leq L d_Y(\ell(y),\ell(g(x))).$$

Dipilih n bilangan asli terkecil yang lebih dari aL. Untuk semua $y \in Y$ dengan $d_Y(\ell(y),\ell(g(x))) < \frac{1}{n}$ berlaku

$$\begin{aligned}d_Z(f(x,\ell(y)),f(x,\ell(g(x)))) &\leq a d_Z(f(x,y),f(x,g(x)))\\ &< aL d_Y(\ell(y),\ell(g(x)))\\ &< n d_Y(\ell(y),\ell(g(x))).\end{aligned}$$

Jadi $x \in F_n$, karena itu $h : X \to Z$ dengan $h(x) = f(x,\ell(g(x)))$ kontinu-σ. □

Jika fungsi g dalam Teorema 6 merupakan fungsi identitas, diperoleh Teorema 7 berikut.

Teorema 7. *Diberikan ruang metrik (X,d_X) dan (Z,d_Z), fungsi kontinu bijektif $\ell : X \to X$, serta fungsi $f : X \times X \to Z$ sehingga*

$$d_Z(f(x,\ell(y)),f(x,\ell(x))) \leq a d_Z(f(x,y),f(x,x))$$

untuk suatu $a \geq 1$. Jika untuk sebarang $(x,x) \in X \times X$, fungsi $f(\cdot,x)$ kontinu dan $f(x,\cdot)$ Lipschitz terhadap fungsi $\ell : X \to X$ pada himpunan $\Delta_\ell = \{(x,\ell(x)) : x \in X\}$, maka fungsi $h : X \to Z$ dengan $h(x) = f(x,\ell(x))$ kontinu-σ.

Bukti. Didefinisikan fungsi $g : X \to X$ dengan $g(x) = x$, diperoleh g kontinu. Selanjutnya, didefinisikan himpunan

$$E = \{(x,\ell(g(x))) : x \in X\}.$$

Karena g fungsi identitas, maka $\Delta_\ell = E$ dan untuk sebarang $(x,x) \in X \times X$ berlaku $f(x,\cdot)$ Lipschitz terhadap fungsi $\ell : X \to X$ pada E. Berdasarkan Teorema 6, didapatkan $f(x,\ell(g(x))) = f(x,\ell(x)) = h(x)$ kontinu-σ. □

Sebelum ditunjukkan bahwa fungsi-CL tergeneralisasi dapat membangun fungsi Baire-1 stabil, terlebih dahulu diberikan definisi fungsi Baire-1 stabil yang dapat dilihat di [6].

Definisi 8. ([6]) *Diberikan ruang topologi X dan Y.*

(1) *Barisan fungsi (f_n), dengan $f_n : X \to Y$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dikatakan konvergen stabil ke $f : X \to Y$ jika untuk setiap $x \in X$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $f_n(x) = f(x)$.*
(2) *Fungsi $f : X \to Y$ disebut fungsi Baire-1 stabil jika terdapat barisan fungsi kontinu (f_n) dari X ke Y sehingga (f_n) konvergen stabil ke f.*

Selanjutnya, akan dimanfaatkan konsep ekstensor mutlak (*absolute extensor*) untuk ruang topologi. Berikut definisi ekstensor mutlak.

Definisi 9. ([4]) *Diberikan ruang topologi X dan Z. Jika untuk sebarang himpunan tertutup $A \subseteq X$ dan fungsi kontinu $g : A \to B$ dengan $B \subseteq Z$ memiliki perluasan fungsi kontinu $f : X \to Z$, maka (Z, B) disebut ekstensor mutlak untuk X.*

Himpunan semua ekstensor mutlak untuk ruang topologi X dinotasikan dengan $AE(X)$. Selanjutnya, jika $(Z, Z) \in AE(X)$, maka cukup ditulis dengan $Z \in AE(X)$. Selain ekstensor mutlak, terdapat konsep tentang ekstensor mutlak sigma, berikut definisinya.

Definisi 10. ([4]) *Diberikan ruang topologi X dan Z. Jika Z memiliki liput terhitung $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ dengan Z_n himpunan tertutup G_δ sehingga berlaku $(Z, Z_n) \in AE(X)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka Z disebut ekstensor mutlak sigma untuk X, ditulis $Z \in \sigma AE(X)$.*

Selanjutnya, sebarang ruang topologi X disebut ruang normal apabila untuk sebarang himpunan tertutup $A, B \subseteq X$ yang tidak beririsan terdapat himpunan terbuka U dan V sehingga $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ dan $B \subseteq V$. Lebih lanjut, setiap ruang metrik merupakan ruang normal.

Banakh [4] membuktikan fungsi kontinu-σ pada ruang lintasan-terhubung merupakan fungsi Baire-1 stabil. Sebelum itu, diberikan terlebih dahulu definisi ruang lintasan-terhubung.

Definisi 11. ([11]) *Diberikan ruang topologi X. Jika untuk sebarang $x_0, x_1 \in X$ terdapat fungsi kontinu $f : [0, 1] \to X$ sehingga*

$$f(0) = x_0 \text{ dan } f(1) = x_1,$$

maka X disebut ruang lintasan-terhubung (path-connected spaces).

Teorema 12. ([4], *Theorem* 6.3) *Diberikan ruang normal X dan ruang lintasan-terhubung Y dengan $Y \in \sigma AE(X)$. Jika $f : X \to Y$ fungsi kontinu-σ, maka f fungsi Baire-1 stabil.*

Dapat ditunjukkan setiap ruang terhubung setara (*equiconnected*) merupakan ruang lintasan-terhubung.

Lema 13. *Setiap ruang metrik terhubung setara* (Z, λ) *merupakan ruang lintasan-terhubung.*

Bukti. Diambil sebarang $z_1, z_2 \in Z$ dengan $z_1 \neq z_2$, dan didefinisikan fungsi $f : [0, 1] \to Z$ dengan

$$f(x) = \lambda(z_1, z_2, x).$$

Jelas bahwa f kontinu dan diperoleh

$$f(0) = z_1 \text{ dan } f(1) = z_2,$$

jadi Z ruang lintasan-terhubung. □

Pada Teorema 14 berikut ini ditunjukkan hasil utama dari penelitian ini, yaitu terbentuknya fungsi Baire-1 stabil dari fungsi-CL tergeneralisasi.

Teorema 14. *Diberikan ruang metrik* (X, d_X)*, ruang metrik terhubung setara* (Z, λ) *dengan* $Z \in \sigma AE(X)$*, dan fungsi kontinu bijektif* $\ell : X \to X$*. Jika fungsi* $f : X \times X \to Z$ *memenuhi*

$$d_Z(f(x, \ell(y)), f(x, \ell(x))) \leq a d_Z(f(x, y), f(x, x))$$

untuk suatu $a \geq 1$*, dan untuk semua* $(x, y) \in X \times X$ *fungsi* $f(\cdot, y)$ *kontinu dan* $f(x, \cdot)$ *Lipschitz terhadap fungsi* $\ell : X \to X$ *pada* $\Delta_\ell = \{(x, \ell(x)) : x \in X\}$*, maka fungsi* $h : X \to Z$ *dengan* $h(x) = f(x, \ell(x))$ *fungsi Baire-1 stabil.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 7, fungsi h kontinu-σ. Karena X ruang metrik, maka X ruang normal. Berdasarkan Teorema 13, Z ruang lintasan-terhubung (*path-connected*). Berdasarkan Teorema 12 diperoleh h fungsi Baire-1 stabil. □

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baire, R., Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **3** (1899), 1-123.

[2] Banakh, T. dan Kutsak, SM. dan Maslyuchenko, VK. dan Maslyuchenko, OV., Direct and Inverse Problems of Baire Classification of Integrals Depending on a Parameter, *Ukrainian Mathematical Journal* **56** (2004), 1721-1737.

[3] Banakh, T., (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions, *Matematychni Studii* **18** (2008), 10-28.

[4] Banakh, T. dan Bokalo, B., On scatteredly continuous maps between topological spaces, *Topology and its Applications* **157** (2010), 108-122.

[5] Burke, M., Borel measurability of separately continuous functions, *Topology and its Applications* **129** (2003), 29-65.

[6] Császár, A. dan Laczkovich, M., Discrete and equal convergence, *Studia Sci. Math. Hungar.* **10** (1975), 463-472.

[7] Karlova, O. dan Mykhaylyuk, V. dan Sobchuk, O., Diagonals of separately continuous functions and their analogs, *Topology and its Applications* **160** (2013), 1-8.

[8] Lebesgue, H., Sur les fonctions représentables analytiquement, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **1** (1905), 139-216.

[9] Miculescu, R., Some observations on generalized Lipschitz functions, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* **37** (2007), 893-903.

[10] Moran, W., Separate Continuity and Supports of Measures, *Journal of the London Mathematical Society* **s1-44** (1979), 320-324.
[11] Munkres, J.R., *Topology*, Prentice Hall, Incorporated, London, 2000.

M HUSEN AL FARISY*(Penulis Korespondensi)
PS Magister Matematika, Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada.
E-mail: husen.al.farisy@mail.ugm.ac.id

ATOK ZULIJANTO
Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada.
E-mail: atokzulijanto@ugm.ac.id