Jurnal Matematika Thales (JMT): 2023 ISSN: 2715-1891
Vol 05 No. 02

SIFAT-SIFAT GRAF IDEAL PRIMA DARI RING KOMUTATIF

(PROPERTIES OF PRIME IDEAL GRAPH OF COMMUTATIVE RING)

Verrel Rievaldo Wijaya*, Abdul Gazir Syarifudin

Abstract. Every prime ideal of a commutative ring can be represented by an undirected graph. Let R be a commutative ring with identity and P a prime ideal of R. A prime ideal graph denoted by Γ_P is the set of every element of $R\backslash\{0\}$ as vertices of the graph with two elements is adjacent if only if the product of the two elements is in P. In this paper, the properties of prime ideal graphs in Z_n are first reviewed, which can then be generalized to any ring. One of the properties of prime ideal graph is that it is simple connected with diameter 2. Furthermore, a formulation is given to calculate the total degree of a prime ideal graph by looking at the number of elements in the prime ideal and the ring. Based on the diameter and degree, the topological index of the prime ideal graph can be found. Other properties discussed are that the clique number and chromatic number of a prime ideal graph are always equal.

Keywords: prime ideal graph, commutative ring, graph degree, topology index, clique number

---

2010 Mathematics Subject Classification: 05C25, 13A15

Abstrak. Setiap ideal prima dari suatu ring komutatif dapat direpresentasikan oleh suatu graf tak berarah. Misalkan R ring komutatif dengan identitas dan P ideal prima dari R. Graf ideal prima dinotasikan dengan Γ_P adalah himpunan setiap elemen $R\backslash\{0\}$ sebagai titik-titik pada graf dengan dua titik bertetangga jika hanya jika hasil perkalian kedua titik ada di P. Pada penelitian ini ditinjau terlebih dahulu sifat-sifat graf ideal prima di Z_n, yang kemudian dapat diperumum ke ring sebarang. Salah satu sifat graf ideal prima tersebut adalah graf ini terhubung sederhana dengan diameter kecil sama dengan 2. Lebih lanjut, diberikan formulasi untuk menghitung total derajat dari graf ideal prima dengan melihat banyaknya elemen di ideal prima dan ring. Berdasarkan diameter dan derajat tersebut, maka dapat ditemukan indeks topologi graf ideal prima. Adapun sifat lainnya yang dibahas yaitu bilangan *clique* dan bilangan kromatik dari graf ideal prima selalu bernilai sama.

Kata-kata kunci: graf ideal prima, ring komutatif, derajat graf, indeks topologi, bilangan *clique*

1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep graf telah digunakan sejak abad ke-17 yaitu pada masalah jembatan Konisberg (Diestel [6]). Walaupun teori graf merupakan pokok bahasan yang muncul sejak lama, teori graf masih menjadi topik yang menarik untuk dibahas sampai sekarang, karena graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit serta keterkaitan antara objek tersebut. Akibat kegunaan tersebut maka graf dapat diterapkan di berbagai bidang ilmu.

Dalam perkembangannya, graf digunakan sebagai representasi dari sistem matematika yaitu grup, ring, dan modul. Beberapa graf yang dapat digunakan untuk merepresentasikan suatu grup adalah graf koprima, graf nonkoprima, graf commuting, graf non-commuting, graf identitas, dan graf siklik. Graf yang dapat digunakan untuk merepresentasikan suatu ring adalah graf pembagi nol, graf prima, dan graf Jacobson. Terakhir, Graf yang dapat digunakan untuk merepresentasikan suatu modul adalah graf annihilator dan lain-lainnya. Himpunan simpul maupun himpunan sisi pada setiap jenis graf ditentukan berdasarkan definisi graf tersebut.

Dalam beberapa tahun terakhir, representasi ring dalam graf merupakan topik penelitian yang semakin banyak dikaji. Salah satu contohnya adalah graf pembagi nol dari suatu ring komutatif. Graf pembagi nol dari suatu ring komutatif adalah graf sederhana yang semua titiknya merupakan semua unsur di ring tersebut dan dua titik dikatakan bertetangga jika dan hanya jika perkalian dua titik tersebut menghasilkan nol. Graf pembagi nol ini pertama kali dikemukakan oleh Beck pada tahun 1988 (Beck [4]). Selanjutnya, pada tahun 2007 Anderson dan Mulay memperoleh sifat graf pembagi nol yaitu diameternya lebih dari atau sama dengan 2 dan girthnya lebih dari atau sama dengan 4 (Anderson & Mulay [2]). Pada tahun 2021, Asir dan Abikka mengemukakan salah satu indeks topologi yaitu indeks Wiener dari graf pembagi nol pada grup modulo n (Asir & Rabikka [3]).

Pada tahun 2022 Salih dan Jund mengembangkan graf yang digunakan untuk mempresentasikan suatu gelangggang komutatif, lebih khusus tentang ideal prima. Graf ini kemudian dinamakan sebagai graf ideal prima. Graf ideal prima didefinisikan sebagai himpunan setiap elemen dari ring komutatif tanpa elemen 0 sebagai titik-titik pada graf dengan dua titik bertetangga jika hanya jika hasil perkalian kedua titik ada pada ideal prima (M., Salih, & Jund. [9]). Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk membahas beberapa sifat graf ideal prima dari ring komutatif antara lain diameter, bilangan kromatik, bilangan clique, derajat titik, jumlah sisi, dan indeks topologi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, diperoleh rumusan masalah yaitu bagaimana sifat-sifat graf ideal prima dari ring komutatif.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah mendeskripsikan sifat-sifat graf ideal prima dari ring komutatif.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

(1) Menambah wawasan peneliti tentang sifat-sifat graf ideal prima dari ring komutatif.
(2) Sebagai landasan untuk penelitian tentang teori graf dan gelanggang komutatif pada masa yang akan datang.

2 LANDASAN TEORI

Ideal prima adalah salah satu subring khusus yang menarik untuk dibahas. Ideal prima didefinisikan sebagai berikut (Gallian [7]).

Definisi 2.1. ***(Ideal Prima)*** *Misalkan R suatu ring komutatif dan P suatu subring dari R. Himpunan P disebut ideal prima dari R jika dan hanya jika $r_1r_2 \in P$, maka $r_1 \in P$ atau $r_2 \in P$.*

Ideal prima ini kemudian dikonstruksi menjadi suatu graf yang disebut graf ideal prima. Rekonstruksi graf ideal prima berikut adalah analog dengan rekonstruksi dari definisi graf ideal maksimal yang dikemukakan oleh Abdulqadr (Abdulqadr [1]).

Definisi 2.2. ***(Graf Ideal Prima)*** *Misalkan R suatu ring komutatif dan P suatu ideal prima dari R. Graf ideal prima Γ_P didefinisikan sebagai himpunan setiap elemen $R - \{0\}$ sebagai titik-titik pada graf dengan r_1 dan r_2 bertetangga jika dan hanya jika $r_1r_2 \in P$.*

Meninjau dari graf pembagi nol maupun graf-graf lainnya, graf ideal prima tentu memiliki sifat-sifat. Oleh sebab itu, maka akan dicari beberapa sifat graf ideal prima, diantaranya diameter, bilangan kromatik, bilangan clique, indeks topologi, derajat titik, dan jumlah sisi. Derajat titik u yang dinotasikan $\deg(u)$ adalah banyaknya tetangga dari u. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut. Jarak dari dua titik adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut. Diameter adalah jarak terpanjang dari sebarang dua titik di G, dinotasikan dengan $\text{diam}(G)$ (Diestel [6]).

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Bilangan n terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan cara tersebut dinamakan bilangan kromatik. Clique dari graf G adalah himpunan K dari titik-titik di G sedemikian sehingga setiap pasangan titik di K dihubungkan oleh suatu sisi. Dengan kata lain, himpunan titik-titik K membentuk graf lengkap. Bilangan clique adalah jumlah clique terbesar dari graf (Chartrand & Lesniak [5]).

Indeks topologi yang dikaji dalam penelitian ini adalah indeks Wiener, indeks Zagreb pertama, dan indeks Zagreb kedua. Indeks Wiener merupakan jumlahan dari jarak antar dua titik pada graf. Indeks Zagreb pertama merupakan jumlahan dari kuadrat derajat titik-titik pada graf. Terakhir, indeks Zagreb kedua merupakan jumlahan dari perkalian derajat dua titik yang saling bertetangga pada graf (Gutman et al. [8]).

Dalam kajian teori graf, terdapat berbagai bentuk graf. Dua diantaranya adalah graf lengkap dan graf bintang. Suatu graf disebut graf bintang jika salah satu titik terhubung ke semua titik lainnya sedangkan titik lainnya terhubung hanya ke salah satu titik tersebut dan suatu graf disebut graf lengkap jika setiap dua simpul berbeda dalam graf tersebut bertetangga (Diestel [6]).

3 METODE PENELITIAN

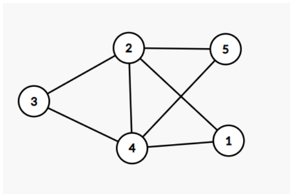
Metode utama yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu mereview jurnal-jurnal dan buku-buku terkait. Awalnya dilakukan analisis terhadap beberapa contoh graf sederhana dan kemudian dibangun konjektur terkait dengan sifat-sifat graf tersebut. Konjektur tersebut lalu dibuktikan berlaku untuk graf yang lebih umum, sehingga didapatkan sebuah teorema baru.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

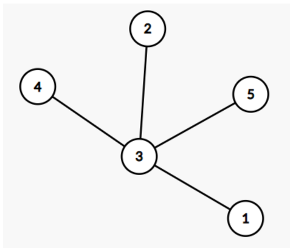
Pada bagian ini, ditampilkan hasil penelitian berupa sifat-sifat graf ideal prima dari ring komutatif. Pertama, ditinjau suatu contoh sederhana sebagai gambaran awal bagaimana sebenarnya bentuk graf ideal prima tersebut. Ring komutatif yang ditinjau selalu berhingga.

4.1 Tinjauan Awal dengan Contoh Ring $\mathbb{Z}_n$

Misalkan diambil ring $\mathbb{Z}_6$ dengan ideal primanya $P_1 = \{0, 2, 4\}$ dan $P_2 = \{0, 3\}$. Graf ideal primanya berturut-turut adalah

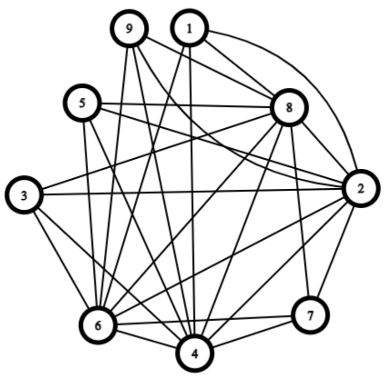


GAMBAR 1. Graf Γ_{P_1}



GAMBAR 2. Graf Γ_{P_2}

Contoh yang sedikit lebih rumit dapat dilihat dengan mengambil ring $\mathbb{Z}_{10}$ dan ideal primanya $P_3 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Graf ideal primanya adalah



GAMBAR 3. Graf Γ_{P_3}

Berdasarkan contoh-contoh sebelumnya, dapat dilihat bahwa anggota ideal prima selalu terhubung ke semua anggota lainnya. Hal ini juga berlaku untuk ring dan ideal prima yang lebih umum.

Teorema 4.1. *Graf ideal prima adalah graf terhubung sederhana.*

Bukti. Ambil $p \in P$, maka $rp \in P, \forall r \in R\backslash\{0\}$. Akibatnya, p terhubung ke semua titik $R\backslash\{0\}$ lainnya. Dengan demikian, tidak ada titik yang terisolasi sehingga grafnya terhubung. Kemudian berdasarkan pendefinisian graf ideal prima, maka setiap dua titik akan tidak terhubung atau dihubungkan oleh satu garis saja. Ini menunjukkan graf tersebut sederhana. $\square$

Hal lain yang juga dapat langsung dilihat adalah bentuk graf apabila ideal prima yang digunakan berorde 2.

Teorema 4.2. *Graf ideal prima merupakan graf bintang jika dan hanya jika ideal primanya berorde 2 .*

Bukti. Misalkan diberikan graf bintang dengan titik p adalah titik yang terhubung ke semua titik lainnya, maka jelas $P = \{0, p\}$ adalah ideal prima dari R dari pendefinisian graf ideal prima itu sendiri.

Untuk konversnya, misalkan diberikan ideal prima berorde 2 yaitu $P = \{0, p\}$. Jelas p terhubung ke semua titik $R\backslash P$, sedangkan dua titik di $R\backslash P$ tidak saling terhubung karena definisi ideal prima. Dengan demikian graf yang terbentuk adalah graf bintang. $\square$

4.2 Diameter Graf

Sifat lain yang dibahas berhubungan dengan diameter graf ideal prima. Nilai diameter graf ideal prima ini selalu terbatas oleh suatu konstan seperti dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 4.3. *Diameter graf ideal prima lebih kecil sama dengan 2.*

Bukti. Misalkan suatu ring komutatif R dengan ideal primanya P. Jika $r_1, r_2 \in R\backslash P$, maka terdapat rute dari r_1 ke r_2 dengan melewati salah satu titik $p \in P\backslash\{0\}$. Rute tersebut dapat ditulis dengan $r_1 \to p \to r_2$. Dengan demikian, $d(r_1, r_2) = 2$. Jika $p \in P\backslash\{0\}$, maka p terhubung ke semua titik $r \in R\backslash\{0\}$. Dengan demikian, $d(p, r) = 1$. Jadi, dapat disimpulkan diameter graf ideal prima ini lebih kecil sama dengan 2. $\square$

4.3 Total Derajat dan Total Sisi

Pada bagian ini dibahas formula untuk mencari total derajat dari graf ideal prima dengan memperhatikan banyak elemen di ring dan ideal primanya. Total sisi kemudian dapat ditemukan dengan rumus total sisi dibagi dua.

Untuk selanjutnya, misalkan ring komutatif R dan ideal primanya P, dengan $|R| = n$ dan $|P| = k$. Lebih lanjut didapatkan $|R\backslash P| = n - k$. Jika $p \in P\backslash\{0\}$, maka p terhubung ke semua titik lainnya kecuali 0 dan p sendiri. Akibatnya, $\deg(p) = n - 2, \forall p \in P\backslash\{0\}$. Jika $r \in R\backslash P$, maka r hanya terhubung ke titik-titik di P kecuali 0

. Akibatnya, $\deg(r) = k - 1, \forall r \in R\backslash P$. Jadi, diperoleh total derajatnya adalah

$$\begin{aligned}
\text{Total derajat } &= \sum_{r \in R\backslash\{0\}} \deg(r) \\
&= \sum_{p \in P\backslash\{0\}} \deg(p) + \sum_{r \in R\backslash P} \deg(r) \\
&= (k-1)(n-2) + (n-k)(k-1) \\
&= (k-1)(2n-k-2)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, total sisinya adalah $\frac{1}{2}(k-1)(2n-k-2)$.

Teorema 4.4. *Total derajat dari graf ideal prima dari Γ_P dengan $|R| = n$ dan $|P| = k$ adalah*

$$\textit{Total derajat } = (k-1)(2n-k-2)$$

Contoh, diambil ring $\mathbb{Z}_6$ dengan ideal primanya $P_1 = \{0, 2, 4\}$ dan $P_2 = \{0, 3\}$ seperti sebelumnya. Total sisi graf ideal primanya berturut-turut adalah

$$\begin{aligned}
\text{Total sisi } \Gamma_{P_1} &= \frac{1}{2}(3-1)(2 \cdot 6 - 3 - 2) = 14. \\
\text{Total sisi } \Gamma_{P_2} &= \frac{1}{2}(2-1)(2 \cdot 6 - 2 - 2) = 4.
\end{aligned}$$

Hasil ini sesuai dengan gambar graf yang diberikan.

Untuk contoh selanjutnya yang grafnya lebih rumit, yaitu ring $\mathbb{Z}_{10}$ dengan ideal primanya $P_3 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ maka diperoleh total sisinya adalah

$$\text{Total sisi } \Gamma_{P_3} = \frac{1}{2}(5-1)(2 \cdot 10 - 5 - 2) = 26.$$

4.4 Bilangan Clique dan Bilangan Kromatik

Untuk mencari bilangan clique dari graf ideal prima, perhatikan bahwa setiap titik di $P\backslash\{0\}$ saling terhubung satu sama lain sehingga titik-titik ini membentuk graf lengkap berukuran $k - 1$. Kemudian ambil titik lain di $R\backslash P$, misalkan r maka r terhubung ke semua titik di $P\backslash\{0\}$ sehingga himpunan titik $\{r\} \cup P\backslash\{0\}$ membentuk graf lengkap. Jika diambil titik lain misalkan $s \in R\backslash P$, maka s tidak terhubung ke r. Akibatnya, $\{r, s\} \cup P\backslash\{0\}$ tidak membentuk graf lengkap. Dengan demikian, dapat disimpulkan graf lengkap maksimal yang terkandung di Γ_P berukuran $1 + (k - 1) = k$. Jadi, bilangan clique dari graf ideal prima adalah orde dari ideal primanya.

Untuk mencari bilangan kromatiknya, tinjau partisi titik-titik sebagai berikut. Setiap titik di $P\backslash\{0\}$ dipisah menjadi satu partisi tersendiri masingmasing dan kemudian himpunan $R\backslash P$ menjadi satu partisi tersendiri. Dengan partisi tersebut maka diperoleh pewarnaan titik yang minimal. Jadi, diperoleh bilangan kromatiknya adalah $(k - 1) + 1 = k$. Berdasarkan kedua penjelasan tersebut, maka diperoleh hasil berikut.

Teorema 4.5. *Bilangan clique dan bilangan kromatik dari graf ideal prima bernilai sama yaitu $k = |P|$.*

4.5 Indeks Topologi

Beberapa indeks topologi yang dibahas pada penelitian ini antara lain indeks Wiener, indeks Zagreb 1, dan indeks Zagreb 2.

Indeks Wiener adalah total seluruh panjang rute di graf atau dapat ditulis

$$\sum_{x,y\in R\backslash\{0\}} d(x,y)$$

Bagi beberapa kasus terlebih dahulu sebagai berikut:

- Jika $x, y \in P\backslash\{0\}$, maka $d(x, y) = 1$. Banyak pasangan titiknya adalah $\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Jika $x \in P\backslash\{0\}$ dan $y \in R\backslash P$, maka $d(x, y) = 1$. Banyak pasangan titiknya adalah (k-1)(n-k)
- Jika $x, y \in R\backslash P$, maka $d(x, y) = 2$. Banyak pasangan titiknya adalah $\begin{pmatrix} n-k \\ 2 \end{pmatrix}$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\text{Indeks Wiener} &= \sum_{x,y\in R\backslash\{0\}} d(x,y) \\
&= \sum_{x,y\in P\backslash\{0\}} d(x,y) + \sum_{x\in P\backslash\{0\},y\in R\backslash P} d(x,y) + \sum_{x,y\in R\backslash P} d(x,y) \\
&= \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix} + (k-1)(n-k) + \begin{pmatrix} n-k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 2
\end{aligned}$$

Indeks Zagreb 1 dari graf ideal prima adalah

$$\begin{aligned}
\text{Indeks Zagreb 1} &= \sum_{x\in R\backslash\{0\}} (\deg(x))^2 \\
&= \sum_{x\in P\backslash\{0\}} (\deg(x))^2 + \sum_{x\in R\backslash P} (\deg(x))^2 \\
&= (k-1)(n-2)^2 + (n-k)(k-1)^2
\end{aligned}$$

Indeks Zagreb 2 didefinisikan sebagai $\sum_{x,y\in R\backslash\{0\}} \deg(x)\deg(y)$, dengan x dan y bertetangga. Bagi beberapa kasus terlebih dahulu sebagai berikut:

- Jika $x, y \in P\backslash\{0\}$, maka $deg(x) = deg(y) = n - 2$. Banyak pasangan titik ini adalah $\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Jika $x \in P\backslash\{0\}$ dan $y \in R\backslash P$, maka $deg(x) = n-2$ dan $deg(y) = k-1$. Banyak pasangan titik ini adalah $(k-1)(n-k)$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}\text{Indeks Zagreb 2} &= \sum_{x,y\in R\setminus\{0\}} \deg(x)\cdot\deg(y)\\ &= \sum_{x,y\in P\setminus\{0\}} \deg(x)\cdot\deg(y) + \sum_{x\in P\setminus\{0\},y\in R\setminus P} \deg(x)\cdot\deg(y)\\ &= \binom{k-1}{2}(n-2)^2+(k-1)^2(n-k)(n-2)\end{aligned}$$

5 KESIMPULAN

Graf ideal prima dari suatu ring komutatif memiliki beberapa sifat yang menarik untuk dibahas. Pertama yaitu melihat bentuk grafnya. Graf ideal prima ini adalah graf terhubung sederhana dan khusus jika ideal primanya berorde 2 maka grafnya menjadi graf bintang. Diameter dari graf ini juga selalu lebih kecil sama dengan 2. Kemudian, parameter dari graf seperti total derajat, total sisi, dan indeks topologi dapat dihitung dengan mudah dengan meninjau orde ring dan orde ideal primanya. Sifat lain yang menarik adalah bahwa bilangan clique dan bilangan kromatik suatu graf ideal prima selalu sama.

REFERENSI

[1] Abdulqadr, F. H., Maximal ideal graph of commutative rings, *Iraqi Journal of Science*, **61(8)** (2020).
[2] Anderson, D. F., dan Mulay, S. B., On the diameter and girth of a zero-divisor graph, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210(2)** (2007).
[3] Asir, T., dan Rabikka, V., The Wiener index of the zero-divisor graph of Z_n, *Discrete Applied Mathematics*, (2021).
[4] Beck, I., Coloring of commutative rings, *Journal of Algebra*, **116(1)** (1988).
[5] Chartrand, G., dan Lesniak, L., *Graphs & Digraphs 6th edition, in : Chapman and Hall*, CRC, 2016.
[6] Diestel, R. , *Graph Theory(5th Edition), in : Springer*, 2017.
[7] Gallian, J., *Contemporary abstract algebra, in : Boston*, MA, 2016.
[8] Gutman, I., Milovanović, E., dan Milovanović, I., Beyond the Zagreb indices, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **17(1)** (2020).
[9] Haval M. Mohammed Salih, dan Asaad A. Jund., Prime ideal graphs of commutative rings, *Indonesian Journal of Combinatorics*, **6(1)** (2022), 42–49.

Verrel Rievaldo Wijaya* (Penulis Korespondensi)
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Insititut Teknologi Bandung, Indonesia
arywijaya86@gmail.com

Abdul Gazir Syarifudin
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Insititut Teknologi Bandung, Indonesia
abdgazirsyazir@gmail.com