Jurnal Matematika Thales (JMT): 2022 ISSN: 2715-1891
Vol. 04 No. 01

PELABELAN $k-$PRIMA PADA BEBERAPA KELAS GRAF GABUNGAN LINTASAN
($k-$PRIME LABELING OF UNION OF PATH GRAPH)

FIRDHA NURHIDAYAH*, YENI SUSANTI

Abstract. Let G be a simple graph, connected, and undirected graph $G = (V(G), E(G))$ with n vertices. Injective labeling on $V(G)$ is said to be prime if each pair of adjacent vertices has a relative prime labels. From the development of prime labeling it is developed a new concept on $k - prime$ labeling. A $k-$prime labeling of a graph G is an injective function $f : V(G) \to \{k, k+1, k+2, \ldots, k+|V(G)-1|$ for some positive integer k that induces a function $f^+ : E(G) \to N$ which N is the set of neightboring vertices and on the edges of G defined by $f^+(uv) = gcd(f(u), f(v))$, for all uv in $E(G)$ such that $gcd(f(u), f(v)) = 1$. A graph G that admits $k-$prime labeling is called a $k-$prime graph. In this paper, it will be discussed about $k-$prime labeling of some graphs such as one point union of path graphs P_n^t for $n \geq 1$ and $t \geq 5$, $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ graphs for $n \geq 3, m = 3, 4, 5$, and $r \geq 2$, and also $P_n(P_q, K_1)$ graphs for $n \geq 2$ and q even.

Keywords: prime labeling, $k-$prime labeling, one point union graph, $P_{n,C_m \circledcirc mK_1,r}$ graph, $P_n(P_q, K_1)$ graph.

Abstrak. Diberikan graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah $G = (V(G), E(G))$ dengan n simpul. Pelabelan injektif pada $V(G)$ disebut pelabelan prima jika setiap pasang simpul yang saling bertetangga memiliki label yang relatif prima. Daripengembangan pelabelan prima diperoleh konsep baru yaitu pelabelan $k-$prima. Suatu pelabelan $k-$prima pada graf G merupakan suatu fungsi injektif $f : V(G) \to \{k, k+1, k+2, \ldots, k+|V(G)-1|$ untuk suatu bilangan bulat k yang menginduksi suatu fungsi $f^+ : E(G) \to N$ dengan N adalah himpunan simpul yang saling bertetangga dan pada sisi G yang didefinisikan dengan $f^+(uv) = gcd(f(u), f(v))$, untuk semua sisi uv di $E(G)$ sedemikian sehingga $gcd(f(u), f(v)) = 1$. Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan $k-$prima disebut graf $k-$prima. Selanjutnya, pada paper ini akan dibahasmengenai pelabelan $k-$prima pada beberapa graf seperti graf gabungan lintasan pada satu titik P_n^t untuk $n \geq 1$ dan $t \geq 5$, graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ untuk $n \geq 3, m = 3, 4, 5$, dan $r \geq 2$, serta graf $P_n(P_q, K_1)$ untuk $n \geq 2$ dan q genap.

Kata-kata kunci: pelabelan prima, pelabelan $k-$prima, graf gabungan lintasan pada satu titik, graf $P_{n,C_m \circledcirc mK_1,r}$, graf $P_n(P_q, K_1)$.

1. PENDAHULUAN

Pada perkembangannya saat ini, penelitian dalam teori graf terus berkembang tidak hanya dari sisi terapannya, melainkan juga dari sisi teorinya. Salah satu topik yang sedang sedang berkembang hingga saat ini adalah pelabelan graf. Chartrand dkk. [1] mendefinisikan graf sederhana G adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G)$ yang beranggotakan obyek-obyek yang disebut simpul-simpul bersama dengan sebuah himpunan $E(G)$ (boleh kosong) yang anggotanya berupa pasangan tidak berurutan dengan bentuk uv, dengan $u, v \in V(G)$, dan $u \neq v$ yang disebut sisi-sisi.

Secara umum, pelabelan pada graf $G = (V(G), E(G))$ merupakan fungsi dengan kodomainnya merupakan himpunan bilangan (umumnya bilangan bulat positif) dan elemen-elemen dari G sebagai domainnya, yaitu himpunan simpul $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, atau kombinasinya dengan syarat tertentu. Berdasarkan pada domain pemetaan tersebut, pelabelan dapat dibedakan menjadi pelabelan vertex (simpul), pelabelan edge (sisi), dan jika domain pemetaan merupakan gabungan himpunan simpul dan himpunan sisi disebut pelabelan total.

Berdasarkan survey Gallian [2] Pelabelan graf adalah pemberian nilai bilangan bulat positif pada simpul atau sisi atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Menurut Teresa dan Vijayalakshm, [3] pelabelan prima adalah pemberian nilai bilangan bulat positif dari 1 sampai n pada simpul graf sedemikian sehingga untuk setiap label dari simpul yang bertetangga adalah relatif prima. Berdasarkan konsep pelabelan prima tersebut Vaidya dan Prajapati [5] mengembangkan konsep baru yaitu pelabelan k-prima. Pelabelan k-prima didefinisikan sebagai berikut, diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ pelabelan k-prima pada graf G adalah suatu fungsi injektif $f : V \to \{k, k+1, k+2, \ldots, k+|V(G)|-1\}$ untuk suatu bilangan bulat positif k yang menginduksi suatu fungsi $f^+(uv) = gcd(f(u), f(v))$, untuk setiap $e = uv \in E(G)$ sedemikian sehingga $\gcd(f(u), f(v)) = 1$ untuk setiap $e = uv \in E(G)$. Graf yang diberi label k-prima disebut graf k-prima.

Vaidya dan Prajapati [5] telah membuktikan bahwa setiap graf lintasan $P_m, m \geq 1$ merupakan k-prima untuk setiap bilangan bulat positif k, sementara Teresa dan Vijayalakshmi [3] membuktikan bahwa setiap graf siklus $C_n, n \geq 3$ dan beberapa graf yang terkait dengan graf siklus merupakan k-prima untuk setiap bilangan bulat positif k. Selanjutnya, pada paper ini akan dipaparkan mengenai pelabelan k-prima pada graf P_n^t untuk $n \geq 1$ dan $t \geq 5$, graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ untuk $n \geq 3, m = 3, 4, 5$, dan $r \geq 2$, dan graf $P_n\,(P_q, K_1)$ untuk $n \geq 2$ dan q genap.

2. GRAF GABUNGAN LINTASAN PADA SATU TITIK

Berikut ini diberikan graf gabungan lintasan pada satu titik P_n^t. Sebelum membahas teorema dari graf P_n^t akan terlebih dahulu diberikan definisi dari graf tersebut.

Definisi 2.1. [4] *Graf gabungan lintasan pada satu titik (one point union of path graph) dinotasikan dengan P_n^t adalah suatu pohon dari tintasan dengan tepat t simpul berderajat satu, satu simpul berderajat t dan $(n-1)t$ simpul lainnnya berderajat dua.*

Berikut akan diberikan teorema mengenai graf P_n^t untuk $k \geq 1$.

Teorema 2.2. [4] *Graf* P_n^t *adalah graf* k*-prima untuk* $k \geq 1$.

Bukti. Diberikan graf P_n^t. Berdasarkan Definisi 2.1.9 tentang graf P_n^t notasi simpul dan sisi dari P_n^t sebagai berikut

$$V\left(P_n^t\right) = \left\{v_i^j \mid i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t\right\} \cup \{u_0\}$$

dan

$$E\left(P_n^t\right) = \begin{cases} v_i^j v_{i+1}^j, & i = 1, 2, \ldots, n-1, j = 1, 2, \ldots, t \\ u_0 v_1^j, & j = 1, 2, \ldots, t \end{cases}$$

Jelas bahwa $|V(P_n^t)| = tn + 1$ dan $|E(P_n^t)| = tn$. Selanjutnya, didefinisikan pelabelan fungsi $f : V(P_n^t) \to \{k, k+1, k+2, \ldots, k+tn\}$ sebagai berikut

Kasus I : Untuk $n = 2^m, m \geq 1$ dan k ganjil

Subkasus (i) : untuk $k + tn$ adalah bilangan prima p terbesar yang termuat dalam kodomain pelabelan, diperoleh

$$f(u_0) = k + tn$$
$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t$$

Subkasus (ii) : untuk $k+tn$ adalah $p+n$ dengan p adalah bilangan prima terbesar yang termuat dalam kodomain pelabelan, diperoleh

$$f(u_0) = p = k + (t-1)n$$
$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t-1$$
$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = t.$$

Subkasus (iii) : untuk $k + tn$ bukan bilangan prima dan bukan $p + n$ dengan p adalah prima terbesar sedemikian sehingga $k + (t-1)n \leq p \leq k + tn$, diperoleh

$$f\left(v_i^j\right) = k + n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t-1.$$

Untuk label simpul $v_1^t, v_2^t, \ldots, v_n^t$ diberi label bilangan bulat tersisa yaitu dari $k+(t-1)n$ hingga $k+$ tn selain p dari $\{p+1, p+2, \ldots, k+tn-1, k+tn, k+(t-1)n, k+(t-1)n+1, \ldots, p-2, p-1\}$ sehingga memenuhi kondisi $f^+\left(v_i^t v_{i+1}^t\right) = \gcd\left(f\left(v_i^t\right), f\left(v_{i+1}^t\right)\right) = 1$.

Kasus II : Untuk n bilangan prima ganjil dan k bukan kelipatan n

Subkasus (i) : untuk $k + tn$ adalah bilangan prima p terbesar yang termuat dalam kodomain pelabelan, diperoleh

$$f(u_0) = k + tn$$
$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, .., t.$$

Subkasus (ii) : untuk $k+tn$ adalah $p+n$ dengan p adalah bilangan prima terbesar yang termuat dalam kodomain pelabelan

$$f(u_0) = p = k + (t-1)n$$

$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t-1$$

$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = t.$$

Subkasus (iii) : untuk $k+tn$ bukan bilangan prima dan bukan $p+n$ dengan p adalah prima terbesar sedemikian sehingga $k+(t-1)n \leq p \leq k+tn$, diperoleh

$$f\left(v_i^j\right) = k + n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t-1$$

Untuk label simpul $v_1^t, v_2^t, \ldots, v_n^t$ diberi label bilangan bulat tersisa yaitu dari $k+(t-1)n$ hingga $k+tn$ selain p dari $\{p+1, p+2, \ldots, k+tn-1, k+tn, k+(t-1)n, k+(t-1)n+1, \ldots, p-2, p-1\}$ sehingga memenuhi kondisi $f^+\left(v_i^t v_{i+1}^t\right) = gcd\left(f\left(v_i^t\right), f\left(v_{i+1}^t\right)\right) = 1$.

Kasus III : Untuk n bilangan komposit selain $2^m, m \geq 1$ dan k bukan faktor kelipatan dari n

Subkasus (i) : untuk $k+tn$ adalah bilangan prima p terbesar yang termuat dalam kodomain pelabelan, diperoleh

$$f(u_0) = k + tn$$

$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, .., t.$$

Subkasus (ii) : untuk $k+tn$ adalah $p+n$ dengan p adalah bilangan prima terbesar yang termuat dalam kodomain pelabelan, diperoleh

$$f(u_0) = p = k + (t-1)n$$

$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t-1$$

$$f\left(v_i^j\right) = k + (j-1)n + i, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = t.$$

Subkasus (iii) : untuk $k+tn$ bukan bilangan prima dan bukan $p+n$ dengan p adalah prima terbesar sedemikian sehingga $k+(t-1)n \leq p \leq k+tn$, diperoleh

$$f\left(v_i^j\right) = k + n + i - 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t-1$$

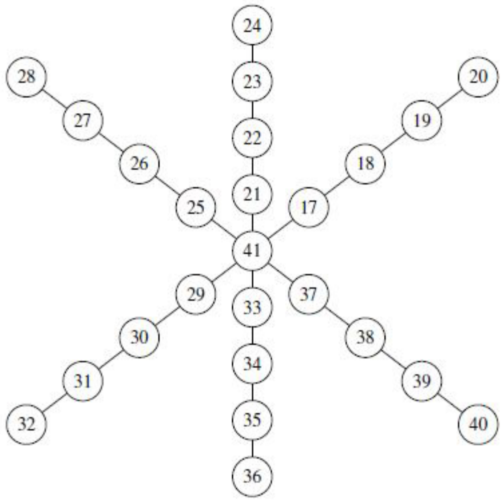
Untuk label simpul $v_1^t, v_2^t, \ldots, v_n^t$ diberi label bilangan bulat tersisa yaitu dari $k+(t-1)n$ hingga $k+tn$ selain p dari $\{p+1, p+2, \ldots, k+tn-1, k+tn, k+(t-1)n, k+(t-1)n+1, \ldots, p-2, p-1\}$ sehingga memenuhi kondisi $f^+\left(v_i^t v_{i+1}^t\right) = gcd\left(f\left(v_i^t\right), f\left(v_{i+1}^t\right)\right) = 1$.

Kasus IV : Untuk $n = 1$ merupakan graf bintang

Pelabelan pada simpul yaitu $f(u_0) = p$

Pelabelan pada simpul yang tersisa yaitu $v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^t$ dengan label $k, k+1, \ldots, k+t$ selain p.

Sehingga dapat dilihat bahwa sisi dengan fungsi yang terinduksi memenuhi kondisi pelabelan k-prima yang berakibat P_n^t adalah graf $k-$ prima. $\square$



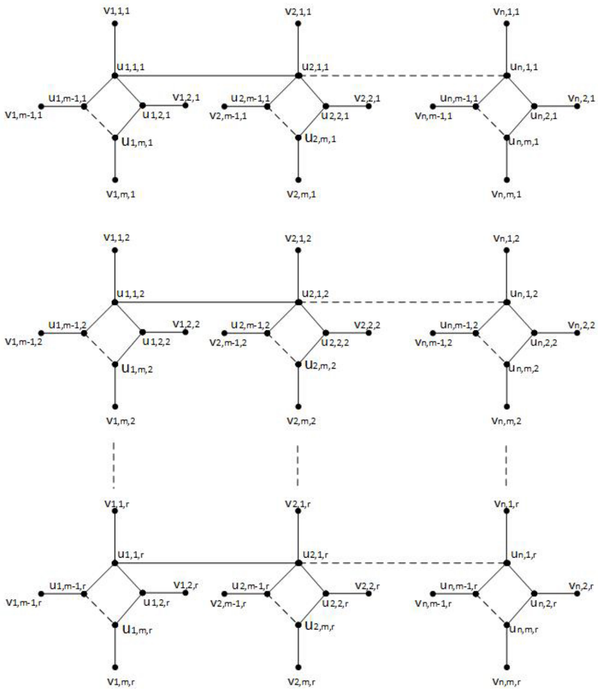
Gambar 1. Pelabelan k-prima pada graf P_6^4 untuk $k = 17$

3. GRAF $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$

Sebelum membahas mengenai teorema graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$, berikut akan diberikan definisi graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$.

Definisi 3.1. *Yang dimaksud dengan graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ adalah graf yang diperoleh dari gabungan r salinan graf lintasan P_n yang pada setiap simpul dari graf lintasan P_n tersebut dilekatkan graf $C_m \odot mK_1$.*

Graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ merupakan gabungan graf P_n sebanyak r salinan yang dilekatkan $C_m \odot mK_1$ pada setiap simpul graf P_n. Lebih lanjut, simpul ke$-j$ pada C_m yang dilekatkan pada simpul ke- i di P_n pada salinan ke r dinotasikan sebagai $u_{i,j,l}(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq r)$ dan simpul K_1 sebanyak m pada graf $C_m \odot mK_1$ dinotasikan sebagai $v_{i,j,l}(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq r)$. Untuk lebih jelasnya, diberikan ilustrasi pada Gambar 2 sebagai ilustrasi dari graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$.



Gambar 2. Graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$

Berikut ini diberikan teorema mengenai pelabelan k-prima pada graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ untuk $n \geq 3, m = 3, 4, 5,$ dan $r \geq 2$.

Teorema 3.2. *Graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ adalah graf $k-$ prima untuk $n \geq 3, m = 3, 4, 5,$ dan $r \geq 2$, dan k ganjil.*

Bukti. Diberikan graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ dengan $n \geq 3, m = 3, 4, 5,$ dan $r \geq 2$. Berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ notasi simpul dari $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} V\left(P_{n,C_m \odot mK_1,r}\right) = &\{u_{i,j,l} \mid i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m, l = 1, 2, .., r\} \cup \\ &\{v_{i,j,l} \mid i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m, l = 1, 2, .., r\} \end{aligned}$$

Jelas bahwa $|V\left(P_{n,C_m \odot mK_1,r}\right)| = r(2mn)$. Selanjutnya, didefinisikan pelabelan $f : V\left(P_{n,C_m \odot mK_1,r}\right) \rightarrow \{k, k+1, k+2, \ldots, k+r(2mn)-1\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} &f\left(u_{i,j,l}\right) = k + 2mi + 2j + l(2mn) - (2m(1+n)+2), \text{ untuk } i = 1, \ldots, n, \\ &j = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, r \\ &f\left(v_{i,j,l}\right) = k + 2mi + 2j + l(2mn) - (2m(1+n)+1), \text{ untuk } i = 1, \ldots, n, \\ &j = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, r. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f menginduksi suatu fungsi $f^{+} : E\left(P_{n,C_m \odot mK_1,r}\right) \rightarrow N$ dengan definisi

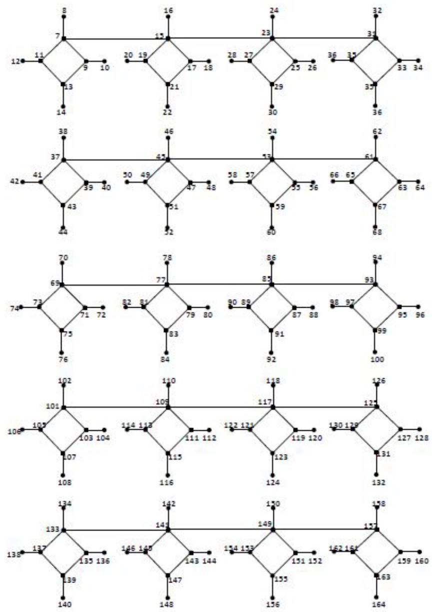
untuk $e = u_{i,j,l}u_{i,j+1,l}$ maka $f^{+}\left(u_{i,j,l}u_{i,j+1,l}\right) = \gcd\left(f\left(u_{i,j,l}\right), f\left(u_{i,j+1,l}\right)\right)\big) =$
$\gcd(k + 2mi + 2j + l(2mn) - (2m(1 + n) + 2), k + 2mi + 2j + 1+$
$l(2mn) - (2m(1 + n) + 2)) = 1,$ untuk $j = 1, 2, \ldots, m - 1$

untuk $e = u_{i,m,l}u_{i,1,l}$ maka $f^{+}\left(u_{i,m,l}u_{i,1,l}\right) = \gcd\left(f\left(u_{i,m,l}\right), f\left(u_{i,1,l}\right)\right)\big) =$
$\gcd(k + 2mi + 2m + l(2mn) - (2m(1 + n) + 2), k + 2mi + 2+$
$l(2mn) - (2m(1 + n) + 2) = 1$

untuk $e = u_{i,j,l}u_{i+1,j,l}$ maka $f^{+}\left(u_{i,j,l}u_{i+1,j,l}\right) = \gcd\left(f\left(u_{i,j,l}\right), f\left(u_{i+1,j,l}\right)\right)\big) =$
$\gcd(k + 2mi + 2j + l(2mn) - (2m(1 + n) + 2).k + 2mi + 1 + 2j+$
$l(2mn) - (2m(1 + n) + 2) = 1,$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

untuk $e = u_{i,j,l}v_{i,j,l}$ maka $f^{+}\left(u_{i,j,l}v_{i,j,l}\right) = gcd\left(f\left(u_{i,j,l}\right), f\left(v_{i,j,l}\right)\right)\big) =$
$\gcd(k + 2mi + 2j + l(2mn) - (2m(1 + n) + 2), k + 2mi + 2j+$
$l(2mn) - (2m(1 + n) + 1)) = 1,$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m.$

Dengan demikian, graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ untuk $n \geq 3, m = 3, 4, 5, r \geq 2$, dan k-ganjil merupakan graf k-prima. □



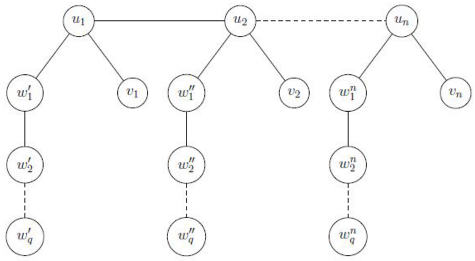
GAMBAR 3. Graf $P_{4,C_4 \odot 4K_1,5}$ untuk $k = 7$

4. GRAF $P_n(P_q, K_1)$

Sebelum membahas mengenai teorema graf teorema $P_n(P_q, K_1)$, berikut akan diberikan definisi graf $P_n(P_q, K_1)$.

Definisi 4.1. *Yang dimaksud dengan graf $P_n(P_q, K_1)$ adalah graf yang diperoleh dari graf K_1 dan graf lintasan P_q yang kedua graf tersebut disalin sebanyak simpul pada graf P_n. Selanjutnya, setiap simpul dari graf P_n dihubungkan dengan satu simpul ujung pada satu graf salinan graf K_1 dan satu simpul ujung pada satu graf salinan graf P_q.*

Untuk lebih jelasnya, diberikan ilustrasi dari graf $P_n(P_q, K_1)$ pada Gambar 4 sebagai berikut $P_n(P_q, K_1)$.



GAMBAR 4. Graf $P_n(P_q, K_1)$

Selanjutnya akan diberikan teorema teorema mengenai pelabelan k-prima pada graf $P_n(P_q, K_1)$ untuk $n \geq 2$ dan q genap.

Teorema 4.2. *Graf $P_n(P_q, K_1)$ adalah graf k-prima untuk $n \geq 2, q$ genap, dan k ganjil.*

Bukti. Diberikan graf $P_n(P_q, K_1)$ dengan $n \geq 2$ dan q genap. Berdasarkan Definisi 2.2.4 tentang graf $P_n(P_q, K_1)$ notasi simpul dari $P_n(P_q, K_1)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(P_n(P_q, K_1)) = & \{u_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{v_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \\ & \{w_i^r \mid i = 1, 2, \ldots, q, r = 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Jelas bahwa $|V(P_n(P_q, K_1))| = n(q+2)$. Selanjutnya didefinisikan pelabelan $f : V(P_n(P_q, K_1)) \to \{k, k+1, k+2, \ldots, k+n(q+2)-1\}$ sebagai berikut

$f(u_i) = k + (q+2)(i-1)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan k tidak memuat faktor kelipatan dari $q+2$

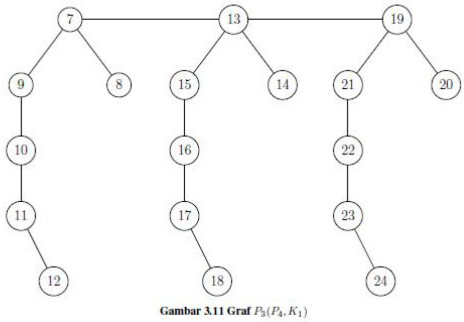
$f(v_i) = k + (q+2)i - (q+1)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan k tidak memuat faktor kelipatan dari $q+2$

$f(w_i^r) = k + (q+2)r + i - (q+1)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, q, r = 1, 2, .., n$, dan k tidak memuat faktor kelipatan dari $q+2$.

Dapat dilihat bahwa f menginduksi suatu fungsi $f^+ : E(P_n(P_q, K_1)) \to N$ dengan definisi

untuk $e = u_i u_{i+1}$, maka $f^+ (u_i u_{i+1}) = gcd\left(f\left(u_i, f\left(u_{i+1}\right)\right)\right) = gcd(k + (q + 2)$
$(i - 1), k + (q + 2)i) = 1,$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$
untuk $e = u_i v_i,$ maka $f^+ (u_i v_i) = gcd\left(f\left(u_i, f\left(u_{i+1}\right)\right)\right) = gcd(k + (q + 2)(i - 1),$
$k + (q + 2)i - (q + 1)) = 1,$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$
untuk $e = u_i w_1^r$, maka $f^+ (u_i w_1^r) = gcd\left(f\left(u_i, f\left(w_1^r\right)\right)\right) = gcd(k + (q + 2)(i - 1),$
$k + (q + 2)r + 1 - (q + 1)) = 1,$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n, r = 1, 2, \ldots, n$
untuk $e = w_i^r w_{i+1}^r$ maka $f^+ \left(w_i^r w_{i+1}^r\right) = gcd\left(f\left(w_i^r, f\left(w_{i+1}^r\right)\right)\right) = gcd(k + (q + 2)r +$
$i - (q + 1), k + (q + 2)r + i + 1 - (q + 1)) = 1,$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n - 1.$

Dengan demikian, graf $P_n\left(P_q, K_1\right)$ untuk $n \geq 2, q$ genap, dan k ganjil merupakan graf k-prima. $\square$



GAMBAR 5. Graf $P_3\left(P_4, K_1\right)$

5. PENUTUP

Berdasarkan Teorema 2.2 mengenai graf gabungan lintasan pada satu titik, Teorema 3.2 mengenai graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$, dan Teorema 4.2 mengenai graf $P_n(P_q, K_1)$ telah dibuktikan bahwa graf P_n^t untuk $n \geq 1, t \geq 5$, dan $k \geq 1$, graf $P_{n,C_m \odot mK_1,r}$ untuk $n \geq 3, m = 3, 4, 5, r \geq 2$, dan k ganjil, serta graf $P_n(P_q, K_1)$ untuk untuk $n \geq 2, q$ genap, dan k ganjil merupakan graf $k-$prima.

Referensi

[1] Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P., *Graphs & Digraphs, Fifth Edition*, A Chapman & Hall Book, New York, 2011.

[2] Gallian, J, A., A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics* (2019), DS6.

[3] Teresa, A. S. dan Vijayalakshmi, G., $k-$Prime Labeling of Certain Cycle Connected Graphs, *Malaya Journal of Matematik*, **S1** (2019), 280-283.

[4] Teresa, A, S. dan Vijayalakshmi, G., $k-$Prime Labeling of One Point Union of Path Graph, *Procedia Computer Science*, **172** (2020), 649-654.

[5] Vaidya, S. K. dan Prajapati, U. M., Some Result on Prime and $k-$Prime Labeling, *Journal ofMathematics Research*, **3** (2011), 66-75.

FIRDHA NURHIDAYAH* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
firdhanurhidayah@mail.ugm.ac.id

YENI SUSANTI
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
yeni_math@ugm.ac.id