Jurnal Matematika Thales (JMT): 2021 ISSN: 2715-1891
Vol. 03 No. 02

MODUL FAKTORISASI TUNGGAL LEMAH (WEAKLY UNIQUE FACTORIZATION MODULES)

I Putu Yudi Prabhadika*, Sri Wahyuni

Abstract. Let D be an integral domain. An element a in D is said to have a factorization if $a = p_1p_2...p_n$ with $p_1, p_2, ..., p_n$ is an irreducible element in D. Futhermore, given the definition of unique factorization domain that is an integral domain with each nonzero nonunit elements in it has an unique factorization. Based on the fact that ring and modules have many interrelated properties, motivate the idea about definition of unique factorization modules and weakly unique factorization modules. It will be shown the properties and characterization of weakly unique factorization modules. Futhermore, will be shown the correlation between weakly unique factorization modules and unique factorization modules.
Keywords: irreducible elements, ring, modules, factorization, unique factorization modules.

Abstrak. Diberikan daerah integral D. Elemen a di D dikatakan memiliki faktorisasi jika $a = p_1p_2...p_n$ dengan $p_1, p_2, ..., p_n$ merupakan elemen tak tereduksi pada D. Selanjutnya, diberikan definisi daerah faktorisasi tunggal yaitu daerah integral yang setial elemen tak nol dan bukan unitnya mempunyai faktorisasi yang tunggal. Berdasarkan fakta bahwa ring dan modul mempunyai sifat yang saling berkaitan, memotivasi pendefinisian dari modul faktorisasi tunggal dan modul faktorisasi tunggal lemah. Akan ditunjukkan sifat-sifat dan karakterisasi dari modul faktorisasi tunggal lemah. Selanjutnya, akan ditunjukkan juga hubungan antara modul faktorisasi tunggal lemah dan modul faktorisasi tunggal.
Kata-kata kunci: elemen tak tereduksi, ring, modul, faktorisasi, modul faktorisasi tunggal.

1. PENDAHULUAN

Diberikan suatu daerah integral D. Daerah integral D disebut daerah faktorisasi tunggal (*unique factorization domain*/UFD) jika memenuhi: (1) setiap elemen tak nol yang bukan unit pada himpunan D memiliki faktorisasi, dan (2) jika $a = p_1p_2...p_n = q_1q_2...q_m$ adalah dua faktorisasi dari a pada himpunan D, maka $n = m$ dan terdapat permutasi σ dari $\{1, 2, ..., n\}$ sedemikian sehingga p_i dan $q_{\sigma(i)}$ saling berasosiasi untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$ [3].

Telah diketahui bahwa ring dan modul banyak memiliki sifat yang saling berkaitan [1]. Hal ini memberikan motivasi dalam penerapan konsep faktorisasi pada modul. Salah satunya adalah Lu (1977) mendefinisikan konsep faktorisasi pada modul yang mendasari pendefinisian modul faktorisasi tunggal (*unique factorization modules*/UFM) beserta sifat dan karakterisasinya. Diberikan M modul bebas torsi tak nol atas daerah integral R. Modul M disebut UFM jika: (1) setiap elemen tak nol $x \in M$ memiliki faktorisasi, yaitu $x = a_1a_2...a_nm$ dengan $a_1, a_2, ..., a_n$ merupakan elemen tak tereduksi di R dan m elemen tak tereduksi di M, dan (2) jika $x = a_1a_2...a_nm = b_1b_2...b_km^{'}$ adalah dua faktorisasi dari x, maka $n = k$, elemen $m \sim m^{'}$ di M, dan $a_i \sim b_i$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., k\}$ [2].

Menggunakan konsep faktorisasi tersebut, Oral, dkk. (2010) kemudian mendefinisikan konsep faktorisasi lemah (*weakly factorization*) dalam modul. Penelitian tersebut juga memberikan definisi elemen prima lemah (*weakly prime element*) dan submodul prima lemah (*weakly prime submodules*) dari suatu modul. Berdasarkan hal tersebut, didefinisikan pengertian yang merupakan perlemahan dari modul faktorisasi tunggal yaitu modul faktorisasi tunggal lemah (*weakly unique factorization modules* / w-UFM) yaitu modul bebas torsi atas ring komutatif dengan elemen satuan dimana setiap tak nol pada modul tersebut memiliki faktorisasi lemah yang tunggal [5]. Penelitian ini membahas tentang definisi dan sifat-sifat dari w-UFM, juga hubungannya dengan UFM. Adapun pada tulisan ini diasumsikan bahwa modul M merupakan modul bebas torsi tak nol dan ring R adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

2. MODUL FAKTORISASI TUNGGAL LEMAH

Elemen Tak Tereduksi dan Elemen Prima Lemah pada Modul.
Diberikan M modul bebas torsi tak nol atas daerah integral R, dan $U(R)$ merupakan himpunan semua elemen unit R. Diberikan pula m dan $m^{'}$ dua elemen di M. Elemen m dikatakan membagi habis $m^{'}$ di M (dinotasikan $m|m^{'}$) jika terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $m^{'} = rm$. Jika $m|m^{'}$, maka m disebut faktor atau pembagi dari $m^{'}$ di M. Dengan menggunakan konsep yang sama, elemen $d \in R$ dikatakan membagi habis m di M (dinotasikan $d|m$), jika terdapat $m_0 \in M$ sedemikian sehingga $m = dm_0$. Jika $d|m$, maka d disebut pembagi dari m di R. Jika $m|m^{'}$ dan $m^{'}|m$, maka dua elemen tersebut disebut berasosiasi di M (dinotasikan $m \sim m^{'}$). Jika $m|m^{'}$ namun m dan $m^{'}$ tidak saling berasosiasi, maka m disebut faktor sejati dari $m^{'}$ di M [2].

Definisi 2.1 ([2]). *Diberikan M modul bebas torsi atas R dan m elemen tak nol M.*

(i) Elemen m disebut tak tereduksi di M jika $m = am^{'}$ mengakibatkan $a \in U(R)$ untuk setiap $a \in R$ dan $m^{'} \in M$.
(ii) Elemen m disebut primitif di M jika $m|am^{'}$ mengakibatkan $m|m^{'}$ untuk setiap $a \in R - \{0\}$ dan $m^{'} \in M$.
(iii) Elemen tak tereduksi $p \in R$ disebut prima terhadap M jika $p|am$ mengakibatkan $p|a$ di R atau $p|m$ di M untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$.

Proposisi 2.2 ([5]). *Diberikan M modul atas R, jika m elemen primitif di M maka m elemen tak tereduksi.*

Bukti. Diambil sebarang elemen primitif $m \in M$ dengan $m = am^{'}$ untuk suatu $a \in R$ dan $m^{'} \in M$. Karena $m = am^{'}$ artinya $m^{'}|m$. Lebih lanjut, $m|am^{'}$ dan karena m primitif mengakibatkan $m|m^{'}$. Diperoleh $m \sim m^{'}$ yang berarti $a \in U(R)$, sehingga m tak tereduksi. □

Menurut Lu (1967), pada kasus modul M merupakan UFM atas UFD R berlaku pula kebalikan dari Proposisi 2.2 yaitu setiap elemen tak tereduksi di M merupakan elemen primitif [2].

Definisi 2.3 ([5]). *Diberikan M modul bebas torsi atas R ring dengan elemen satuan. Elemen tak nol $m \in M$ disebut prima lemah (w-prime) jika untuk setiap $a, b \in R$ dan $m^{'} \in M$ dengan $m|abm^{'}$ mengakibatkan $m|am^{'}$ atau $m|bm^{'}$.*

Diperhatikan bahwa jika m elemen prima lemah dari M maka rm juga merupakan elemen prima lemah untuk setiap $r \in U(R)$ dan setiap elemen primitif dari M merupakan elemen prima lemah [5].

Contoh 2.4. *Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang merupakan ring dan $M = \mathbb{Z}[x]$ modul atas $\mathbb{Z}$, dipilih $2x \in M$. Diambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $f(x) \in M$ dengan $2x|abf(x)$ yang berarti terdapat $c \in \mathbb{Z}$ sehingga $abf(x) = c2x$. Jika $2x \nmid af(x)$, artinya g.c.d.$\{2x, af(x)\} = 1$, yang berarti terdapat $g(x), h(x) \in M$ sehingga*

$$\begin{aligned} 1 &= 2xg(x) + af(x)h(x) \\ bf(x) &= 2xg(x)bf(x) + af(x)h(x)bf(x) \\ bf(x) &= b2xg(x)f(x) + abf(x)^2h(x). \end{aligned}$$

Karena $2x|b2xg(x)f(x)$ dan $2x|abf(x)^2h(x)$, diperoleh $2x|bf(x)$. Jadi $2x$ elemen prima lemah di M.

Jika M modul atas R dan N submodul sejati di M, submodul N merupakan submodul prima jika untuk setiap $a \in R$ dan $k \in M$, $aRk \subseteq N$ mengakibatkan $k \in N$ atau $a \in Ann_R(M/N)$ [6]. Jika $a \in Ann_R(M/N)$, artinya untuk setiap $k \in M$ diperoleh

$$\begin{aligned} a(k + N) &= 0 + N \\ ak + N &= 0 + N \\ ak &\in N. \end{aligned}$$

Hal inilah yang melatarbelakangi pendefinisian yang merupakan perlemahan dari submodul prima, yaitu submodul prima lemah (*weakly prime submodule*).

Definisi 2.5 ([5]). *Diberikan M modul atas R dan N submodul M. Himpunan N disebut submodul prima lemah (w-prime submodule) jika $abk \in N$ mengakibatkan $ak \in N$ atau $bk \in N$ untuk setiap $k \in M$ dan $a, b \in R$.*

Selanjutnya, berdasarkan [5] diketahui bahwa elemen $m \in M$ prima lemah jika dan hanya jika Rm submodul prima lemah di M. Elemen prima lemah nantinya akan memegang peran penting dalam konsep faktorisasi lemah pada modul.

Modul Faktorisasi Tunggal Lemah.

Definisi 2.6 ([5]). *Modul bebas torsi M atas ring komutatif dengan elemen satuan R disebut modul faktorisasi tunggal lemah (w-UFM) jika memenuhi kondisi berikut:*

(1) setiap elemen tak nol $x \in M$ memiliki faktorisasi lemah, yaitu $x = a_1a_2...a_km$, dimana $a_1, a_2, ..., a_k$ merupakan elemen tak tereduksi di R (dengan k mungkin sama dengan nol) dan m elemen prima lemah di M, dan

(2) jika $x = a_1a_2...a_km = b_1b_2...b_tm^{'}$ adalah dua faktorisasi lemah dari x, maka $k = t$, $m \sim m^{'}$, dan $a_i \sim b_i$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Definisi 2.7 ([2]). *Diberikan M modul atas R dengan $a \in R$ dan $m \in M$.*

(1) Elemen $d \in R$ disebut faktor persekutuan terbesar atau greatest common divisor (g.c.d.) dari a dan m jika
   (i) $d|a$ di R dan $d|m$ di M, dan
   (ii) untuk setiap $c \in R$ jika $c|a$ di R dan $c|m$ di M maka $c|d$ di R.

(2) Elemen $m^* \in M$ disebut kelipatan persekutuan terkecil atau least common multiple (l.c.m.) dari a dan m jika
   (i) $a|m^*$ dan $m|m^*$ di M, dan
   (ii) untuk setiap $w \in M$ jika $a|w$ dan $m|w$ di M maka $m^*|w$.

Faktor persekutuan terbesar dari a dan m dinotasikan dengan (a, m) atau g.c.d.$\{a, m\}$, sedangkan kelipatan persekutuan terkecil dari a dan m dinotasikan dengan $[a, m]$ atau l.c.m.$\{a, m\}$.

Contoh 2.8. *Diberikan modul $\mathbb{Z}^3$ atas $\mathbb{Z}$.*

(1) Diambil $a = 8 \in \mathbb{Z}$ dan $m = (4\ 12\ 8)^t \in \mathbb{Z}^3$. Jelas bahwa $2 \in \mathbb{Z}$ merupakan g.c.d.$\{a, m\}$ karena $2|a$ dan $2|m$, juga karena untuk setiap $c \in \mathbb{Z}$ jika $c|a$ di $\mathbb{Z}$ dan $c|m$ di $\mathbb{Z}^3$ maka $c|2$ di $\mathbb{Z}$.

(2) Diambil $a = 3 \in \mathbb{Z}$ dan $m = (2\ 3\ 5)^t \in \mathbb{Z}^3$. Jelas bahwa $k = (6\ 9\ 15)^t \in \mathbb{Z}^3$ merupakan l.c.m.$\{a, m\}$ karena $a|k$ dan $m|k$, juga karena untuk setiap $w \in \mathbb{Z}$ jika $a|w$ dan $m|w$ di $\mathbb{Z}^3$ maka $k|w$ di $\mathbb{Z}^3$.

Sebelumnya telah diketahui bahwa setiap elemen primitif di M merupakan elemen prima lemah. Seperti dipaparkan oleh Oral (2016), pada kasus M merupakan w-UFM atas UFD R sebaliknya juga berlaku [5].

Teorema 2.9 ([5]). *Diberikan M modul atas UFD R yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.6. Modul M merupakan w-UFM jika dan hanya jika setiap elemen prima lemah dari M merupakan elemen primitif.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diberikan M merupakan w-UFM dan $m \in M$ elemen prima lemah. Akan ditunjukkan m merupakan elemen primitif. Misalkan $m|abm^{'}$ untuk suatu $m^{'} \in M$ dan $a, b \in R$, artinya terdapat $r \in R$ sedemikian sehingga $rm = abm^{'}$. Telah diketahui bahwa M merupakan w-UFM dan R merupakan UFD sehingga terdapat elemen-elemen tak tereduksi di R yaitu $r_1, ..., r_k, a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_l, c_1, ..., c_n$ dan elemen prima lemah $m^* \in M$ sedemikian sehingga $r = r_1...r_k$, $a = a_1...a_t$, $b = b_1...b_l$ dan $m^{'} = c_1...c_n m^*$. Lebih lanjut, diperoleh $r_1...r_k m = a_1...a_t b_1...b_l c_1...c_n m^*$. Himpunan M merupakan w-UFM, oleh sebab itu diperoleh $k = t + l + n$ dan $r_i \sim a_i$, $r_j \sim b_j$, $r_s \sim c_s$ dan $m \sim m^*$, karenanya terdapat $r^* \in U(R)$ sedemikian sehingga $m^* = r^* m$. Didapat $m^{'} = c_1...c_n m^* = c_1...c_n r^* m$, sehingga $m|m^{'}$. Terbukti m elemen primitif.
($\Leftarrow$) Diketahui bahwa setiap elemen prima lemah dari M merupakan elemen primitif. Akan dibuktikan M w-UFM. Diambil sebarang x elemen tak nol di M dengan $x = a_1...a_t m = b_1...b_l m^{'}$ merupakan faktorisasi dari x. Diperoleh $m|b_1...b_l m^{'}$, $m^{'}|a_1...a_t m$. Jelas bahwa m dan $m^{'}$ merupakan elemen prima lemah sehingga $m|m^{'}$ dan $m^{'}|m$. Oleh sebab itu, $m \sim m^{'}$ sehingga terdapat $u \in U(R)$ sedemikian sehingga $m = um^{'}$. Akibatnya, $a_1...a_t um^{'} = b_1...b_l m^{'}$ sehingga $ua_1...a_t = b_1...b_l$. Berdasarkan yang diketahui bahwa R merupakan UFD, terbukti M merupakan w-UFM. $\square$

Proposisi 2.10 ([2]). *Diberikan M modul atas R daerah integral, untuk sebarang $m, m^* \in M$ dan $a \in R$. Berlaku*

(1) $m^* \sim$ l.c.m.$\{a, m\}$ jika dan hanya jika $aM \cap Rm = Rm^*$.
(2) Misalkan p elemen tak tereduksi di R dengan l.c.m.$\{p, m\}$ ada di M. Jika $p \nmid m$, maka $pM \cap Rm = Rpm$.

Bukti. (1) Misalkan l.c.m.$\{a, m\} = y \in M$, artinya $a|y$ dan $m|y$ sehingga $y = ap$ dan $y = mq$ untuk suatu $p \in M$ dan $q \in R$.
($\Rightarrow$) Diketahui $m^* \sim y$, artinya m^* dan $y|m^*$ sehingga $y = p^{'} m^*$ dan $m^* = q^{'} y$ untuk suatu $p^{'}, q^{'} \in R$. Diambil sebarang $x \in aM \cap Rm$, artinya $a|x$ dan $m|x$. Karena $y =$ l.c.m.$\{a, m\}$, didapat $y|x$ sehingga $x = zy = zp^{'} m^* \in Rm^*$ untuk suatu $z \in R$. Terbukti $aM \cap Rm \subseteq Rm^*$. Diambil sebarang $x^* \in Rm^*$, artinya $x^* = r^{'} m^*$ untuk suatu $r^{'} \in R$. Diperoleh

$$x^* = r^{'} m^* = r^{'} q^{'} y = r^{'} q^{'} mq = r^{'} q^{'} qm \in Rm$$

dan

$$x^* = r^{'} m^* = r^{'} q^{'} y = r^{'} q^{'} ap = ar^{'} q^{'} p \in aM.$$

Terbukti $x^* \in aM \cap Rm$ sehingga $Rm^* \subseteq aM \cap Rm$. Jadi $aM \cap Rm = Rm^*$.
($\Leftarrow$) Akan dibuktikan $m^*|y$ dan $y|m^*$. Jelas bahwa $m^* \in Rm^* = aM \cap Rm$ sehingga $a|m^*$ dan $m|m^*$. Karena $y =$ l.c.m.$\{a, m\}$, maka $y|m^*$. Lebih lanjut, karena $y = ap = qm$ diperoleh $y \in aM \cap Rm = Rm^*$ sehingga $y = cm^*$ untuk suatu $c \in R$. Terbukti $m^*|y$. Jadi, $m^* \sim y =$ l.c.m.$\{a, m\}$.

(2) Misalkan $m^* \sim l.c.m.\{p, m\}$, artinya $0 \neq m^* = am = pm_0$ dan $pm = bm^*$ untuk suatu elemen tak nol $a, b \in R$ dan $m_0 \in M$. Diperoleh $p = ab$ sehingga $m = bm_0$. Berdasarkan yang diketahui, $p \nmid m$ dan $b|m$ sehingga $p \nsim b$. Oleh sebab itu, $p \sim a$ dan b unit, sehingga $m^* \sim pm$. Berdasarkan (1), didapat $pM \cap Rm = Rpm$.

□

Proposisi 2.11. *Diberikan M modul atas G.C.D.-domain R dengan g.c.d$\{a, m\}$= (a, m) ada untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$. Untuk setiap $b \in R$, berlaku*

(1) $((a, b), m) \sim (a, (b, m))$,
(2) $(ba, bm) \sim b(a, m)$,
(3) jika $a|bm$ *dan* $(a, m) = 1$, *maka* $a|b$.

Bukti. (1) Akan dibuktikan $((a, b), m)|(a, (b, m))$ dan $(a, (b, m))|((a, b), m)$. Jelas bahwa $((a, b), m)|(a, b)$ dan $((a, b), m)|m$ ...(i), yang berarti $((a, b), m)|a$ ... (ii) dan $((a, b), m)|b$ ...(iii). Berdasarkan (i) dan (iii) diperoleh $((a, b), m)|(b, m)$ ...(iv). Berdasarkan (ii) dan (iv), diperoleh $((a, b), m)|(a, (b, m))$ ...(α).
Jelas bahwa $(a, (b, m))|a$ ...(v) dan $(a, (b, m))|(b, m)$ ...(vi). Berdasarkan (vi), diperoleh $(a, (b, m))|b$ ...(vii) dan $(a, (b, m))|m$ ...$(viii)$. Berdasarkan (v) dan (vii), diperoleh $(a, (b, m))|(a, b)$ ...(ix). Berdasarkan $(viii)$ dan (ix) diperoleh $(a, (b, m))|((a, b), m)$ ...(β). Berdasarkan (α) dan (β) terbukti $((a, b), m) \sim (a, (b, m))$.

(2) Akan dibuktikan $(ba, bm) \sim b(a, m)$ dengan menunjukkan $(ba, bm) = b(a, m)$. Misalkan $d = (a, m)$ akan ditunjukkan $bd|ba$, $bd|bm$ dan jika $e|ba$ dan $e|bm$ mengakibatkan $e|bd$. Berdasarkan $d = (a, m)$ artinya $d|a$ dan $d|m$ sehingga $bd|ba$ dan $bd|bm$. Misalkan $e|ba$ dan $e|bm$. Jelas bahwa $d = ax + my$ untuk suatu $x, y \in R$ sehingga $bd = bax + bmy$. Jelas bahwa $e|bax$ dan $e|bmy$, yang berarti $e|bd$. Terbukti, $(ba, bm) = b(a, m)$.

(3) Akan dibuktikan $a|b$. Karena $a|bm$, artinya $bm = ak$ untuk suatu $k \in R$. Diketahui $(a, m) = 1$, berarti

$$1 = ax + my$$

untuk suatu $x \in R$ dan $y \in R$. Diperoleh

$$b = b \cdot 1 = b(ax + my) = bax + bmy = bax + aky = a(bx + ky)$$

sehingga didapat $a|b$.

□

Teorema 2.12. *Diberikan M modul bebas torsi atas UFD R. Modul M merupakan UFM jika dan hanya jika M merupakan w-UFM.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui M merupakan UFM, artinya setiap elemen tak tereduksi di M merupakan elemen primitif. Telah diketahui pula bahwa setiap elemen prima lemah merupakan elemen tak tereduksi, sehingga diperoleh setiap elemen prima lemah di M merupakan elemen primitif. Terbukti M merupakan w-UFM.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa M merupakan w-UFM. Telah diketahui bahwa setiap elemen prima lemah merupakan elemen tak tereduksi, sehingga dengan menggunakan pembuktian yang analog dengan Teorema 2.1 pada [2], dapat ditunjukkan bahwa setiap elemen tak tereduksi di M merupakan elemen primitif. Oleh sebab itu, terbukti M merupakan UFM. □

Berdasarkan Teorema 2.12, diketahui bahwa pada w-UFM M atas UFD R, setiap elemen tak tereduksi di M juga merupakan elemen prima lemah. Dari sifat tersebut juga diperoleh bahwa pada modul bebas torsi atas UFD, suatu w-UFM juga dapat dipandang sebagai UFM. Menggunakan sifat tersebut, dapat diketahui sifat-sifat lainnya pada w-UFM berdasarkan [2].

Akibat 2.13. *Diberikan M modul atas UFD R yang memenuhi (1) pada Definisi 2.6, maka pernyataan berikut ini ekuivalen:*

(1) Modul M atas R merupakan w-UFM.
(2) Setiap elemen prima lemah di M merupakan elemen primitif.
(3) Untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$, g.c.d.$\{a, m\}$ ada di R.
(4) Untuk setiap $a \in R$ dan $m \in M$, l.c.m.$\{a, m\}$ ada di M, sehingga submodul $aM \cap Rm$ merupakan submodul siklik.
(5) Setiap elemen tak tereduksi p di R merupakan elemen prima terhadap M.
(6) (i) Jika a dan b merupakan elemen R dengan $aM \subseteq bM$, maka $b|a$ dan
(ii) untuk setiap $a, b \in R$ terdapat $c \in R$ sedemikian sehingga $aM \cap bM = cM$.

Bukti. Telah diketahui bahwa modul M atas UFD juga merupakan UFM, menggunakan pembuktian Teorema 2.1 pada [2], terbukti bahwa ekuivalensi pada poin *(1)* sampai *(6)* berlaku. □

Contoh 2.14. *Diberikan $M = \mathbb{Z}[x]$ modul atas $R = \mathbb{Z}$. Diambil sebarang $p \in R$ elemen tak tereduksi dengan $p|af(x)$, untuk sebarang $a \in R$ dan $f(x) \in M$. Akan dibuktikan p prima terhadap M. Jika $p \nmid a$ di R, artinya g.c.d.$\{p, a\} = 1$ yang berarti terdapat $c, d \in R$ sehingga*

$$1 = cp + da$$
$$f(x) = cpf(x) + adf(x).$$

Karena $p|cpf(x)$ dan $p|adf(x)$, diperoleh $p|f(x)$ sehingga terbukti p elemen prima terhadap M. Karena sebarang elemen tak tereduksi di R merupakan elemen prima terhadap M, terbukti bahwa $M = \mathbb{Z}[x]$ merupakan w-UFM berdasarkan Akibat 2.13.

Akibat 2.15. *Setiap ruang vektor merupakan w-UFM.*

Bukti. Pada [2] telah diketahui bahwa setiap ruang vektor merupakan UFM. Karena ruang vektor merupakan modul atas lapangan dan lapangan merupakan UFD, menurut Teorema 2.12 dapat disimpulkan bahwa setiap ruang vektor juga merupakan w-UFM. □

Definisi 2.16 ([2]). *Diberikan M modul atas R dan N submodul M. Himpunan N dikatakan submodul murni (pure submodule) jika untuk setiap $a \in R$ maka $aM \cap N = aN$.*

Akibat 2.17. *Jika M modul atas UFD R yang merupakan w-UFM dan N submodul murni dari M maka N juga w-UFM atas R.*

Bukti. Terbukti berdasarkan Akibat 2.4 pada [2] dan Teorema 2.12. □

Akibat 2.18 ([5])**.** *Diberikan $\{M_i \mid i \in I\}$ merupakan himpunan modul-modul atas UFD R. Pernyataan berikut ekuivalen:*

(1) $\prod_{i \in I} M_i$ merupakan w-UFM atas R,
(2) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ merupakan w-UFM atas R,
(3) setiap M_i merupakan w-UFM atas R.

Bukti. Diketahui bahwa pada modul atas UFD, UFM juga merupakan w-UFM. Oleh sebab itu, berdasarkan pembuktian pada [2] Akibat 2.5, terbukti bahwa ekuivalensi (1) sampai (3) juga berlaku. □

3. PENUTUP

Modul faktorisasi tunggal lemah (w-UFM) merupakan modul bebas torsi atas ring dengan elemen satuan yang setiap elemen tak nolnya memiliki faktorisasi lemah yang tunggal. Telah diketahui bahwa UFM dan w-UFM merupakan modul dengan definisi berbeda yang termotivasi dari penerapan sifat faktorisasi tunggal pada ring. Namun pada modul bebas torsi atas UFD, suatu modul yang merupakan w-UFM juga dapat dipandang sebagai UFM. Hal ini menyebabkan setiap elemen tak tereduksi pada suatu w-UFM atas UFD merupakan elemen prima lemah. Berdasarkan fakta tersebut, dapat diturunkan sifat-sifat w-UFM berdasarkan sifat-sifat yang diketahui dari UFM.

Ucapan terima kasih*.** Terima kasih sebesar-besarnya kepada Prof. Hidetoshi Marubayashi yang telah memberi banyak saran dan inspirasi utama dalam penulisan ini. Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan pada tulisan ini. Oleh sebab itu, kami akan sangat berterima kasih jika terdapat saran atau masukan dari pembaca.

Referensi

[1] Adkins, W.A., Weintraub, S.H., *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.
[2] Lu, C. P., Factorial Modules, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Vol. 7 No. 1 (1977), pp. 125-139.
[3] Malik, D. S., Mordeson, J.M., Sen, M.K., *Fundamentals of Abstract Algebra*, McGraw-Hill Companies, Inc., Singapore, 1997.
[4] Nicolas, A., *Modules Factoriels*, Seminaire Dubrell-Pisot, Vol. 20 No. 10 (1967), pp. 1-12.
[5] Oral, K.H., Tekir, U., Agargun, A.G., Weakly Unique Factorization Modules, *Tamkang Journal of Mathematics*, Vol. 41 No. 3 (2016), hal. 245-252.
[6] Wahyuni, S., Wijayanti, I.E., Yuwaningsih, D.A., Hartanto, A.D., *Teori Ring dan Modul*, Gadjah Mada University Press, 2016.

I Putu Yudi Prabhadika* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
yudiprabhadika@yahoo.com

Sri Wahyuni
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.
swahyuni@ugm.ac.id