Jurnal Matematika Thales (JMT): 2020 ISSN: 2715-1891
Vol. 02 No. 02

# PEMBUAT IDEAL MENDASAR

# (BASIC IDEALIZERS)

KHOLIDA KHOIRUNNISA*, INDAH EMILIA WIJAYANTI, SUTOPO

**Abstract.** Let $S$ be a ring and $A$ be a right ideal. We can construct the largest subring of $S$ in which $A$ be two sided ideal. This structure is called idealizer and denoted by $R = \mathbb{I}_S(A)$. In this paper we discuss idealizer of generative isomaximal right ideals that is called basic idealizer. Module over $S$ can be viewed as modules over subring $R$. For arbitrary subrings $R$, some properties of modules such as projective dan simple are not preserved between when changing the ring. Furthermore, we show that under condition that $R$ is basic idealizer, these properties are preserved.
*Keywords*: idealizers, generative right ideals, isomaximal right ideals, projective modules, simple modules.

**Abstrak.** Diberikan ring $S$ dan ideal kanan $A$. Dapat dibangun subring terbesar di $S$ sedemikian sehingga $A$ merupakan ideal dua sisi di subring tersebut. Struktur ini disebut pembuat ideal dan dinotasikan dengan $R = \mathbb{I}_S(A)$. Di dalam paper ini akan dibahas pembuat ideal dari ideal kanan isomaksimal generatif yang selanjutnya disebut pembuat ideal mendasar. Modul atas ring $S$ dapat dipandang sebagai modul atas subring $R$. Modul atas ring $S$ dapat dipandang sebagai modul atas subring $R$. Untuk sebarang subring $R$, beberapa sifat modulnya seperti sifat proyektif dan sifat sederhana tidak diawetkan ketika mengganti ring tumpuannya. Lebih lanjut, ditunjukkan bahwa jika $R$ pembuat ideal mendasar, sifat-sifat ini diawetkan.
*Kata-kata kunci*: pembuat ideal, ideal kanan generatif, ideal kanan isomaksimal, modul proyektif, modul sederhana.

## 1. PENDAHULUAN

Pada ring nonkomutatif, ideal kanan belum tentu merupakan ideal kiri, demikian pula sebaliknya. Misalkan $A$ suatu ideal kanan dari ring $S$. Dalam [1] didefinisikan himpunan $\{s \in S \mid sA \subseteq A\}$ sebagai subring terbesar di $S$ yang memuat $A$ sebagai ideal. Selanjutnya subring tersebut dinotasikan dengan $\mathbb{I}_S(A)$ dan disebut pembuat

---

*2010 Mathematics Subject Classification*: 16D25, 16D60 ideal (*idealizer*) $A$. Subring $T$ dari $S$ sedemikian sehingga $A \subset T \subseteq \mathbb{I}_S(A)$ disebut subpembuat ideal $A$.

Jika $A$ dari ring $S$ dan $SA = S$, maka $A$ disebut ideal kanan generatif. Lebih lanjut, dalam [1] didefinisikan konsep ideal kanan semimaksimal dan ideal kanan isomaksimal. Suatu ideal kanan dikatakan semimaksimal jika $(S/A)_S$ merupakan jumlah langsung dari modul-modul sederhana. Suatu ideal kanan dikatakan isomaksimal jika $(S/A)_S$ merupakan jumlah langsung dari modul-modul sederhana yang saling isomorfis.

Modul atas ring $S$ dapat dianggap sebagai modul atas subring $R$. Tidak semua sifat antara kedua modul tersebut sama seperti sifat sederhana. Akan diselidiki kegunaan pembuat ideal mendasar dalam mengawetkan sifat antara kedua modul tersebut. Pada keseluruhan penelitian ini, ring yang dimaksud merupakan ring dengan elemen satuan dan subring yang dimaksud merupakan subring dengan elemen satuan yang sama.

## 2. PEMBUAT IDEAL

Telah dipahami bahwa dalam suatu ring non komutatif $S$, bisa saja terdapat ideal satu sisi $A$, yaitu ideal kanan saja (atau ideal kiri saja). Berikut diberikan definisi pembuat ideal [1].

**Definisi 2.1.** *Diberikan $A$ ideal kanan dari ring $S$. Subring $\mathbb{I}_S(A) = \{x \in S \mid xA \subseteq A\}$ disebut pembuat ideal dari $A$ di $S$.*

Secara sama, untuk setiap ideal kiri $B$ dari ring $S$ dapat didefinisikan pembuat ideal kiri sebagai $\mathbb{I}_S(B) = \{x \in S \mid Bx \subseteq B\}$.

**Proposisi 2.2.** *Diberikan ideal kanan $A$ di dalam ring $S$. Pembuat ideal $\mathbb{I}_S(A)$ merupakan subring terbesar di $S$ yang memuat $A$ sedemikian sehingga $A$ merupakan ideal (dua sisi).*

**Contoh 2.3.** *Untuk sebarang ideal (dua sisi) $I$ dari ring $S$, $\mathbb{I}_S(I) = S$.*

**Contoh 2.4.** *Diberikan ring $S = M_2(\mathbb{Z})$, ideal kanan $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ dan ideal kiri $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z} \right\}$. Didapat $\mathbb{I}_S(A) = \mathbb{I}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid p, q, r \in \mathbb{Z} \right\}$.*

Diberikan $A$ ideal kanan dari ring $R$ dan $B$ ideal (dua sisi) dari $R$ dengan $B \subseteq A$. Dapat dibentuk ring faktor ${}^{A}\!/_{B}$ dan ${}^{S}\!/_{B}$. Ring faktor ${}^{A}\!/_{B}$ merupakan ideal kanan dari $S/B$. Oleh karena itu, dapat dibentuk pembuat ideal $\mathbb{I}_{S/B}(A/B)$. Sementara itu, karena $B \subseteq A \subseteq \mathbb{I}_S(A)$, dapat dibentuk ${}^{(\mathbb{I}_S(A))}\!/_{B}$. Berikut diberikan hubungan $\mathbb{I}_{S/B}(A/B)$ dan ${}^{(\mathbb{I}_S(A))}\!/_{B}$.

**Proposisi 2.5.** *Diberikan $A$ ideal kanan dari ring $R$ dan $B$ ideal dari $R$ dengan $B \subseteq A$. Berlaku hubungan* $\mathbb{I}_{S/B}(A/B) = {}^{(\mathbb{I}_S(A))}\!\diagup_{B}$.

*Bukti.* Diambil sebarang $x+B \in \mathbb{I}_{S/B}(A/B)$, akan dibuktikan bahwa $x+B \in {}^{(\mathbb{I}_S(A))}\!\diagup_{B}$.

$$\begin{aligned}
x + B &\in \mathbb{I}_{S/B}(A/B) \\
(x + B)({}^{A}\!\diagup_{B}) &\subseteq {}^{A}\!\diagup_{B} && \text{(karena } \mathbb{I}_{S/B}(A/B) \text{ pembuat ideal)} \\
(x + B)(a + B) &\in {}^{A}\!\diagup_{B} && (\forall a + B \in {}^{A}\!\diagup_{B}) \\
xa + B &\in {}^{A}\!\diagup_{B} \\
xa &\in A && (\forall a \in A) \\
xA &\subseteq A \\
x &\in \mathbb{I}_S(A)
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $x + B \in {}^{(\mathbb{I}_S(A))}\!\diagup_{B}$. □

Perkalian elemen $s \in S$ dari kiri merupakan suatu endomorfisma dari modul $S_S$. Didapat hasil berikut.

**Proposisi 2.6.** *Diberikan ideal kanan $A$ atas ring $S$.*

$$\mathbb{I}_S(A) \cong \{\lambda \in End(S_S) \mid \lambda(A) \subseteq A\}$$

*Bukti.* Misalkan $D = \{\lambda \in \mathrm{End}(S_S) \mid \lambda(A) \subseteq A\}$ Dibentuk pengaitan

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{I}_S(A) &\to D \\
x &\mapsto \lambda_x
\end{aligned}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{I}_S(A)$, dengan definisi

$$\begin{aligned}
\lambda_x : S &\to S \\
s &\mapsto xs
\end{aligned}$$

untuk setiap $s \in S$. Jelas bahwa $\theta$ merupakan isomorfisma dan $xA = \lambda_x(A)$. □

Sifat di atas memotivasi hasil yang berkaitan dengan ring faktor sebagai berikut.

**Lemma 2.7.** *Diberikan ideal kanan $A, B$ dari ring $R$.*

(1) $\mathbb{I}(A)/A \cong End_S({}^{S}\!\diagup_{A})$ *melalui multiplikasi kiri.*
(2) $\{s \in S \mid sA \subseteq B\}/B \cong Hom_S\{{}^{S}\!\diagup_{A}, {}^{S}\!\diagup_{B}\}$ *melalui multiplikasi kiri.*

*Bukti.* Poin (1) merupakan kejadian khusus dari poin (2) dengan mengambil $A = B$. Pertama, dibuktikan poin (2).

Jelas $\mathrm{Hom}_S\{{}^{S}\!\diagup_{A}, {}^{S}\!\diagup_{B}\}$ bukan ring terhadap operasi komposisi fungsi. Oleh karena itu, isomorfisma pada poin (2) merupakan isomorfisma grup terhadap operasi penjumlahan elemen dan fungsi biasa.

Misalkan $\{s \in S \mid sA \subseteq B\} = C$ dan $\mathrm{Hom}_S\{{}^{S}\!/_{A}, {}^{S}\!/_{B}\} = H$. Dibentuk pengaitan

$$\begin{aligned} \phi &: {}^{C}\!/_{B} \to H \\ \phi(x+B) &= \lambda_x \qquad \forall x \in C. \\ &\text{dan} \\ \lambda_x &: {}^{S}\!/_{A} \to {}^{S}\!/_{B} \\ \lambda_x(s+A) &= xs + B \qquad \forall s+A \in {}^{S}\!/_{B} \end{aligned}$$

(1) Ambil sebarang $\phi(x_1+B), \phi(x_2+B) \in H$ dengan $\phi(x_1+B) = \phi(x_2+B)$. Diperoleh $x_1s + B = x_2s + B$ untuk setiap $s \in S$. Didapat $(x_1 - x_2)s \in B$. Karena $1 \in S$, maka $x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)1 \in B$. Akibatnya, $x_1 + B = x_2 + B$. Jadi, $\phi$ injektif.

(2) Ambil sebarang $\lambda \in H$. Misalkan $\lambda(1+A) = x + B$, maka $\lambda(s+A) = xs + B$ untuk setiap $s \in S$. Dipilih $x + B \in C/B$. Didapat $\phi(x+B) = \lambda$. Lebih lanjut, karena $\lambda(a+A) = \lambda(0) = 0 + B$, maka $xa + B = 0 + B$ untuk setiap $a \in A$. Didapat $xA \subseteq B$. Dengan demikian $x \in C$. Jadi, $\phi$ surjektif.

(3) Jelas bahwa $\phi$ merupakan homomorfisma terhadap operasi penjumlahan. Untuk kasus (1) yaitu jika $A = B$, dapat dibuktikan bahwa $\phi$ homomorfisma ring dengan menganggap $\mathrm{End}_S(S/A)$ ring dengan operasi penjumlahan dan komposisi fungsi.

□

## 3. SUBPEMBUAT IDEAL DARI IDEAL KANAN GENERATIF

Telah dipahami bahwa pembuat ideal $\mathbb{I}_S(A)$ dari suatu ideal kanan $A$ merupakan subring terbesar sedemikian sehingga $A$ merupakan ideal di $\mathbb{I}_S(A)$. Dengan demikian, bisa saja terdapat subring $T$ yang termuat dalam $\mathbb{I}_S(A)$ sedemikian sehingga $A$ merupakan ideal di $T$.

**Definisi 3.1.** *Misalkan $A$ ideal kanan dari ring $S$. Subring $T$ yang memenuhi $\mathbb{I}_S(A) \supseteq T \supset A$ dan $A$ merupakan ideal di $T$ disebut subpembuat ideal dari $A$.*

**Definisi 3.2.** *Ideal kanan $A$ dari ring $S$ dikatakan generatif jika memenuhi $SA = S$.*

**Contoh 3.3.** *Diberikan ring sederhana $S$. Jika $A$ ideal kanan tak nol dari ring $S$, maka $A$ generatif.*

*Bukti.* Karena $A$ ideal kanan, maka $AS \subseteq A$. Didapat $(SA)S = S(AS) \subseteq SA$. Sementara itu $S(SA) = S^2A \subseteq SA$. Jadi, $SA$ ideal dua sisi di $S$. Karena $A$ tak nol, maka $SA \neq 0$. Karena $S$ ring sederhana, maka ideal tak nol dari $S$ hanyalah $S$. Jadi, $SA = S$. □

**Contoh 3.4.** *Diberikan ring $S = M_n(D)$ untuk suatu ring $D$. Jika $a \in S$ matriks yang mempunyai entri yang merupakan unit, maka $aS$ merupakan ideal kanan generatif.*

*Bukti.* Untuk setiap matriks yang mempunyai entri yang merupakan unit, dapat membangun matriks satuan $E_{kl}$ dengan entri baris ke-$k$, kolom ke-$l$ bernilai 1 dan lainnya

0. Karena $k, l$ diambil sebarang, maka setiap matriks satuan merupakan anggota $SaS$. Oleh karena itu, $S = SaS$. Jadi, $aS$ generatif. $\square$

Salah satu penerapan dari penjelasan di atas dapat dilihat dari contoh berikut.

**Contoh 3.5.** *Diambil* $D = \mathbb{Z}$ *dan* $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & n \end{pmatrix}$ *untuk suatu* $n \in \mathbb{N}$. *Dibentuk ring* $S = M_2(D)$. *Diperoleh* $aS = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$. *Akan ditunjukkan bahwa* $aS$ *merupakan ideal kanan generatif, yaitu* $SaS = S$. *Diambil sebarang* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in S$. *Diperhatikan bahwa*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

*dan*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Dengan demikian,* $aS$ *merupakan ideal kanan generatif.*

**Proposisi 3.6.** *Diberikan ring* $S$. *Jika* $A$ *ideal generatif kanan dari ring* $S$ *dan* $R$ *merupakan subpembuat ideal dari* $A$, *maka berlaku*

(1) $S_R$ *dan* ${}_RA$ *merupakan modul proyektif yang dibangun secara hingga.*
(2) $S \otimes_R S \cong S \otimes_R A \cong S$ *melalui multiplikasi.*
(3) $(S/R) \otimes_R S = 0 = (R/A) \otimes_R A$ *dan* $(S/R) \otimes_R A \cong S/A \cong (R/A) \otimes_R S$.

*Bukti.* (1) (a) Pertama, diperhatikan $S_R$. Menurut Lemma Basis Dual [1], cukup dibuktikan bahwa $1_{End(S_R)} \in SS^*$.
Karena $A$ ideal generatif kanan, yaitu, $SA = S$, maka $1_S = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$. Setiap elemen $a_i \in A$ dapat dianggap sebagai elemen/pemetaan dalam $S^* = Hom(S_R, R_R)$ dengan perkalian dari kiri, yaitu

$$a_i : S_R \to R_R$$
$$a_i(s) \in A \subseteq R. \qquad \text{(karena } A \text{ ideal kanan.)}$$

Diperoleh $1 = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i \in SS^*$. Jadi, $S_R$ modul proyektif yang dibangun secara hingga.

(b) Selanjutnya diperhatikan ${}_RA$. Menurut Lemma Basis Dual [1], cukup dibuktikan bahwa $1_R \in A^*A$.

Karena $A$ ideal generatif kanan, yaitu, $SA = S$, maka $1_R = 1_S = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$. Setiap elemen $s_i \in S$ dapat dianggap sebagai elemen/pemetaan dari $A^* = Hom(_RA,_R R)$ dengan perkalian dari kanan, yaitu

$$\begin{aligned} s_i :_R A &\to_R R \\ s_i(a) &= as_i \in A \subseteq R. \qquad\qquad \text{(karena } A \text{ ideal kanan.)} \end{aligned}$$

Diperoleh $1_R = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i \in A^* A$. Jadi, $_RA$ modul proyektif yang dibangun secara hingga.

(2) Karena $S_R$ proyektif, maka $S_R$ flat. Karena $_RA \subseteq_R R \subseteq_R S$, maka $S \otimes_R A \subseteq S \otimes_R R \subseteq S \otimes_R S$. Dioeroleh

$$S \otimes_R S = SA \otimes_R S = S \otimes_R AS = S \otimes_R A = S \otimes_R AR = SA \otimes_R R = S \otimes_R R.$$

Dengan demikian $S \otimes_R S = S \otimes_R R = S \otimes_R A$. Selanjutnya diperhatikan pemetaan perkalian

$$\begin{aligned} \phi : S \otimes_R R &\to S \\ (s, r) &\mapsto sr \in S. \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan $\phi$ isomorfisma. Jadi, $S \otimes_R R \cong S$. Oleh karena itu, $S \otimes_R S \cong S \cong S \otimes_R A$.

(3) Diperhatikan barisan eksak pendek dari modul-modul kanan atas $R$ berikut

$$0 \to R \to S \to S/R \to 0.$$

Jika masing-masing ditensorkan dari kanan oleh $S$, didapat

$$R \otimes S \xrightarrow{f} S \otimes S \xrightarrow{g} (S/R) \otimes S \to 0.$$

Karena $S \otimes S \cong S$, maka

$$R \otimes S \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} (S/R) \otimes S \to 0.$$

$Im(f) = RS = S = \ker(g)$. Oleh karena itu, $(S/R) \otimes S = 0$.

$$0 \to R \to S \to S/R \to 0.$$

Di lain pihak, jika masing-masing ditensorkan dari kanan oleh $A$, didapat

$$R \otimes A \xrightarrow{h} S \otimes A \xrightarrow{p} (S/R) \otimes A \to 0.$$

Karena $S \otimes A \cong S$, maka

$$R \otimes A \xrightarrow{h} S \xrightarrow{p} (S/R) \otimes A \to 0.$$

$Im(h) = RA = A = \ker(p)$. Oleh karena itu, $(S/R) \otimes A \cong S/A$.

Diperhatikan barisan eksak pendek dari modul-modul berikut

$$0 \to A \to R \to R/A \to 0.$$

Jika masing-masing ditensorkan dari kanan oleh $A$, didapat

$$A \otimes A \xrightarrow{f} R \otimes A \xrightarrow{g} (R/A) \otimes A \to 0.$$

Karena $A \otimes A \cong A \cong R \otimes A$, maka

$$A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} (R/A) \otimes A \to 0.$$

$Im(f) = A = \ker(g)$. Oleh karena itu, $(R/A) \otimes A = 0$.

□

Selanjutnya diberikan beberapa akibat jika $S \otimes_R S \cong S$.

**Proposisi 3.7.** *Diberikan ring $S$ dan subring $R$ dari $S$ dengan $S \otimes_R S \cong S$ melalui multiplikasi. Jika $M$ dan $N$ merupakan modul kanan atas $S$ dan $L$ modul kiri atas $S$, maka*

(1) *$M \otimes_R S \cong M$ melalui multiplikasi;*
(2) *jika $M_R$ merupakan modul projektif, maka $M_S$ juga merupakan modul projektif;*
(3) *$Hom_R(M, N) = Hom_S(M, N)$;*
(4) *Jika $M_R$ modul injektif, maka $M_S$ juga modul injektif;*
(5) *$M \otimes_R L \cong M \otimes_S L$.*

*Bukti.* (1) Diperhatikan bahwa

$$M \otimes_R S \cong M \otimes_S S \otimes_R S \cong M \otimes_S S \cong M.$$

(2) Misalkan $M_R$ modul proyektif, artinya $M_R$ merupakan suatu jumlahan langsung dari suatu modul kanan bebas atas $R$, yaitu

$$M_R \oplus N_R = P_R$$

dengan $P_R$ modul bebas. Dengan ditensorkan atas $R$ dengan $S$, didapat

$$(M \otimes_R S) \oplus (N \otimes_R S) = P \otimes_R S$$

Dari (1) didapat

$$M_S \oplus N_S = P_S$$

Dengan demikian, $M_S$ merupakan suatu jumlahan langsung dari suatu modul kanan bebas atas $S$. Jadi, $M_S$ modul proyektif.

(3) Jelas $Hom_S(M, N) \subseteq Hom_R(M, N)$. Selanjutnya, diambil sebarang $R$-homomorfisma $\phi : M \to N$. Didefinisikan

$$\phi' : M \otimes_R S \to N \otimes_R S$$
$$\phi' = \phi \otimes 1.$$

Jelas $\phi'$ merupakan $S$-homomorfisma. Karena (i), yaitu $M \otimes_R S \cong M$ dan $N \otimes_R S \cong N$, didapat $\phi' = \phi$. Dengan demikian, $\phi$ merupakan $S$-homomorfisma. Didapat, $Hom_R(M, N) \subseteq Hom_S(M, N)$. Jadi, $Hom_R(M, N) = Hom_S(M, N)$.

(4) Misalkan $M_R$ modul injektif. Akan dibuktikan $M_S$ modul injektif dengan Kriteria Baer untuk modul injektif. Ambil sebarang $I$ ideal kanan dari $S$ dan $S$-homomorfisma $\alpha : I \to M$. Karena $R$ subring dari $S$, maka $\alpha$ juga merupakan $R$-homomorfisma. Karena $M_R$ modul injektif, maka $\alpha$ dapat diperluas

menjadi $R$-homomorfisma $\alpha' : S \to M$.

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} \to & R & \hookrightarrow & S \\ & \downarrow_{\alpha} & \swarrow_{\alpha'} & \\ & M & & \end{array}$$

Karena (3), maka $\alpha'$ merupakan $S$-homomorfisma. Jadi, $M_S$ modul injektif.

(5) Diperhatikan

$$\begin{aligned} M \otimes_R L &\cong (M \otimes_S S) \otimes_R (S \otimes_S L) \quad (\text{karena (i) } M \otimes_R S \cong M \text{ dan } S \otimes_S L \cong L) \\ &\cong M \otimes_S (S \otimes_R S) \otimes_S L \\ &\cong M \otimes_S S \otimes_S L \qquad (\text{ karena dari yang diketahui } S \otimes_R S = S) \\ &\cong M \otimes_S (S \otimes_S L) \\ &\cong M \otimes_S L \qquad (\text{ karena } S \otimes_S L = L). \end{aligned}$$

□

Hasil dari Proposisi 3.7 diterapkan untuk subpembuat ideal dari ideal kanan generatif sebagai berikut.

**Proposisi 3.8.** *Diberikan ring $S$. Jika $A$ ideal kanan generatif dari $S$ dan $R$ subpembuat ideal dari $A$, maka*

(1) *semua pernyataan pada Proposisi 3.7 berlaku;*
(2) *untuk setiap ideal tak nol $B$ dari $S$, berlaku $B \cap R \neq 0$;*
(3) *jika $M$ modul kanan atas $S$ maka $M \otimes_R A \cong M$ melalui multiplikasi; dan $M_R$ modul proyektif jika dan hanya jika $M_S$ modul proyektif.*
(4) *jika $A \subseteq_R X \subseteq S$ maka*
$S \otimes_R X \cong SX = S$;
$({}_RX^*) \cong \{s \in S | Xs \subseteq R\}$ *melalui multiplikasi kanan. Lebih lanjut, melalui isomorfisma ini, $A \subseteq X^* \subseteq S$.*
(5) $({}_RA)^* = S$ *dan* $(S_R)^* = A$ *melalui multiplikasi.*

*Bukti.* (1) Dari Proposisi 2.4 (ii) didapat $S \otimes_R S \cong S$. Jelas bahwa semua pernyataan pada Proposisi 2.5 berlaku.

(2) Ambil sebarang ideal tak nol $B$ dari $S$. Karena $B$ ideal, maka $AB \subseteq B$. Di lain pihak, karena $A$ ideal kanan dari $S$, maka $AB \subseteq AS \subseteq A \subseteq R$. Didapat $AB \subseteq B \cap R$. Karena $A$ ideal generatif kanan, maka $SA = S$. Oleh karena itu, $0 \neq B = SB = SAB$. Andaikan $AB = 0$, maka $B = SAB = 0$. Kontradiksi. Jadi, $0 \neq AB \subseteq B \cap R$.

(3) Diperhatikan

$$M \otimes_R A \cong (M \otimes_S S) \otimes_R A \cong M \otimes_S (S \otimes_R A) \cong M \otimes_S S \cong M.$$

Selanjutnya, misalkan $M_S$ modul proyektif, artinya $M_S$ merupakan jumlahan langsung dari suatu modul kanan bebas atas $S$. Berdasarkan Proposisi 2.3 (i), didapat$S_R$ proyektif. Oleh karena itu, setiap modul kanan bebas atas $S$ juga proyektif atas $R$. Hal ini berlaku pula untuk jumlahan langsungnya, termasuk

$M_S$. Jadi, $M_R$ proyektif. Di lain pihak, berdasarkan Proposisi 2.4 (ii), berlaku bahwa jika $M_R$ proyektif, maka $M_S$ proyektif.

(4) Diperhatikan bahwa $X \subseteq SX$. Karena $S_R$ proyektif, maka $S_R$ flat. Dengan melakukan tensor, didapat $S \otimes_R X \subseteq S \otimes_R SX$. Di lain pihak,

$$S \otimes_R SX \cong S \otimes_R S \otimes_S SX \cong S \otimes_S SXS \cong S) \cong SX.$$

Selanjutnya diperhatikan

$$\begin{aligned} f : S \otimes_R X &\twoheadrightarrow SX \\ s \otimes x &\mapsto sx \end{aligned}$$

merupakan epimorfisma. Karena $S \otimes_R X \subseteq S \otimes_R SX \cong SX$, maka homomorfisma di atas merupakan isomorfisma. Dengan demikian, $S \otimes_R X \cong SX$. Terakhir, karena $S = SA \subseteq SX \subseteq S$, maka $SX = S$. Selanjutnya dibentuk fungsi

$$\begin{aligned} f : \{s|Xs \subseteq R\} &\to Hom(_RX, R) \\ s &\mapsto \phi_s \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \phi_s : X &\to R \\ x &\mapsto xs. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan $f$ injektif, yaitu $\ker(f) = 0$. Ambil sebarang $s \in \ker(f)$, maka $\phi_s = 0$. Akibatnya, $Xs = 0$, maka $Ss = SAs \subseteq SXs = S0 = 0$. Karena $1_S \in S$ maka $s = 1_S s \in Ss = 0$. Jadi, $s = 0$. Akan dibuktikan $f$ surjektif. Ambil sebarang $\phi \in Hom(_RX, R)$. Dibentuk

$$\begin{aligned} 1 \otimes \phi : S \otimes_R X &\to S \otimes_R R \\ s \otimes x &\mapsto s \otimes \phi(x) \end{aligned}$$

Karena $S \otimes_R X \cong S$ dan $S \otimes_R R \cong S$, maka $1 \otimes \phi : S \to S$. Jadi, $\phi$ dapat dinyatakan sebagai multiplikasi kanan atas suatu elemen di $S$.

(5) Dari (iv), didapat $(_RA)^* = \{s \in S|As \in R\}$. Karena $A$ ideal kanan dari $S$, maka $AS \subseteq A \subseteq R$. Jadi, $(_RA)^* = S$. Dengan cara sama, $(S_R)* = \{s \in S|sS \in R\}$. Karena $A$ ideal kanan dari $S$, maka $AS \subseteq A \subseteq R$. Jadi, $(S_R)^* = A$.

$\square$

## 4. MODUL SEDERHANA ATAS PEMBUAT IDEAL MENDASAR

Suatu ideal kanan $A$ dari ring $S$ dikatakan maksimal jika modul $(S/A)_S$ merupakan modul sederhana. Lebih lanjut, didefinisikan konsep ideal kanan semimaksimal dan ideal kanan isomaksimal [1].

**Definisi 4.1.** *Diberikan ideal kanan $A$ dari ring $S$. Jika $S$-modul kanan $S/A$ merupakan modul semisederhana, maka $A$ dikatakan semimaksimal. Lebih lanjut, jika $S/A \cong U^{(n)}$ untuk suatu modul sederhana $U_S$ dan suatu $n \geq 1$, maka $A$ dikatakan isomaksimal tipe $U$.*

Dengan demikian, ideal kanan $A$ dikatakan isomaksimal jika $S/A$ merupakan hasil jumlahan langsung dari modul-modul sederhana yang saling isomorfis.

**Contoh 4.2.** *Diberikan* $S = M_2(\mathbb{Z})$. *dan*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 6\mathbb{Z} & 6\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \quad C = M_2(2\mathbb{Z}), \quad D = M_2(4\mathbb{Z}).$$

*maka*

(1) $A$ *ideal kanan isomaksimal generatif.*
(2) $B$ *ideal kanan semimaksimal generatif.*
(3) $C$ *ideal isomaksimal tetapi tidak generatif.*
(4) $D$ *bukan ideal semimaksimal maupun generatif.*

*Bukti.* Dari Contoh 3.5, diperoleh bahwa $A$ dan $B$ ideal kanan generatif. Akan tetapi, $C$ dan $D$ bukan ideal kanan generatif karena $SC \subseteq C$ dan $SD \subseteq D$. Diperhatikan

$$S/A = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z}+1 & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z}+1 & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} S/A &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix} \right\} \\ &\cong \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\} \times \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\} \\ &\cong \{\bar{0}, \bar{1}\} \times \{\bar{0}, \bar{1}\} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\ &\cong (\mathbb{Z}_2)^2 \end{aligned}$$

dengan $\mathbb{Z}_2$ sederhana.

Dengan cara sama,

$$S/B \cong (\mathbb{Z}_6)^2 \cong (\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{3}\})^2,$$

$$S/C \cong (\mathbb{Z}_6)^4 \cong (\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{3}\})^4,$$

$$S/C \cong (\mathbb{Z}_2)^4$$

$$S/D \cong (\mathbb{Z}_4)^2$$

dengan $\mathbb{Z}_2, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{0}, \bar{3}\}$ masing-masing sederhana. Sedangkan $\mathbb{Z}_4$ bukan sederhana. Oleh karena itu, $A$ dan $C$ ideal kanan isomaksimal. Ideal kanan $B$ semimaksimal. Sedangkan $D$ bukan ideal kanan semimaksimal maupun isomaksimal.

Melihat hal ini dapat diperumum bahwa ideal kanan yang berbentuk $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ merupakan ideal kanan isomaksimal generatif jika $n$ bilangan prima. Ideal kanan ini merupakan ideal kanan semimaksimal generatif jika $n$ bukan bilangan prima, yaitu modul kuosiennya isomorfis dengan jumlah langsung submodul yang dibangun oleh faktor-faktor primanya. Lebih lanjut, ideal kanan yang berbentuk $M_2(n\mathbb{Z})$ merupakan ideal dua sisi dan bukan ideal kanan generatif. Jika $n = p$, maka ideal di atas merupakan ideal isomaksimal. $\square$

**Definisi 4.3.** *Diberikan ring $S$ dan ideal kanan $A$ di $S$. Pembuat ideal $R = \mathbb{I}_S(A)$ disebut pembuat ideal (kanan) mendasar tipe $U$ jika $A$ ideal kanan generatif dan iso-maksimal tipe $U$, yaitu $S/A \cong U^{(n)}$.*

Jika $M_S$ merupakan modul sederhana, belum tentu $M_R$ dengan $R$ subring di $S$ juga merupakan modul sederhana. Contohnya adalah modul $\mathbb{R}_\mathbb{R}$ merupakan modul sederhana, tetapi $\mathbb{R}_\mathbb{Z}$ bukan modul sederhana karena memuat submodul sejati $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$. Berikut diberikan syarat cukup agar sifat tersebut berlaku.

**Teorema 4.4.** *Misalkan $R = \mathbb{I}_S(A)$ merupakan pembuat ideal mendasar tipe $U$, dengan $S/A \cong U^n$. Pernyataan-pernyataan berikut berlaku :*

(1) *Jika $X$ merupakan $S$-modul sederhana yang tidak isomorfis dengan $U$, maka $X$ sebagai $R$-modul merupakan modul sederhana pula.*
(2) *$U_R$ dapat dikomposisikan secara tunggal dengan panjang 2 dan faktor komposisinya, katakan $V$ dan $W$ berlaku $V \neq W$ dan*

$$(S/R)_R \cong V^{(n)}$$
$$(R/A)_R \cong W^{(n)}$$

(3) *Setiap $R$-modul kanan sederhana berbentuk $V$, $W$ atau $X$ sesuai dengan poin (i).*

*Bukti.* Diperhatikan bahwa $R/A$ dipandang sebagai $R$-modul kanan merupakan jumlah langsung dari sebanyak $n$ modul-modul sederhana atas $R$. Tulis modul sederhana tersebut adalah $W$. Jadi, $(R/A)_R \cong W_R^n$. Karena $RA \subseteq A$, maka $A = \text{ann}(R/A) = \text{ann}(W)$. Didapat $WA = 0$.

Sementara itu, sebarang $S$-modul kanan sederhana dapat dinyatakan sebagai $S/B$ untuk suatu ideal kanan maksimal $B$. Misalkan $C/B$ merupakan $R$-submodul sejati dari $S/B$. Diperhatikan bahwa $((CA + B)/B)S \subseteq (CA + B)/B$. Jadi, $(CA + B)$ merupakan $S$-submodul dari $S/B$. Diperoleh $(CA + B)/B = (C/B)A \subseteq C/B \subset S/B$. Jadi, $(CA + B)$ merupakan $S$-submodul sejati dari $S/B$. Oleh karena itu, $(CA + B)/B = 0$. Dengan demikian, $CA \subseteq B$. Dibentuk $D = \{d \in S \mid dA \subseteq B\}$. Diperoleh $C \subseteq D$. Dari Lema 2.7, didapat $D/B \cong \text{Hom}_S(S/A, S/B)$.

(1) Diambil sebarang $S$-modul sederhana $X$ dengan $X \ncong U$. Misalkan $X \cong S/B$ untuk suatu ideal kanan maksimal $B$. Diambil sebarang $R$-submodul sejati $C/B$ dari $S/B$. Karena $X \ncong U$, didapat $\text{Hom}(S/A, S/B) = \text{Hom}(U^n, X) = 0$. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, $D/B = \text{Hom}(S/A, S/B) = 0$. Diperoleh $D \subseteq B$. Karena $C \subseteq D$, didapat $C \subseteq B$. Dengan demikian $C/B = 0$. Artinya, $S/B$ tidak memiliki $R$-submodul sejati yang taknol. Jadi, $X = S/B$ merupakan $R$-modul sederhana.
(2) Misalkan $(S/B)_R \cong U_R$ dengan $B$ ideal kanan maksimal dari $S$ dan $C/B$ merupakan $R$-submodul sejati dari $S/B$. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, $C \subseteq D = \{d \in S \mid dA \subseteq B\}$. Di lain pihak, karena $A$ generatif, yaitu $SA = S \nsubseteq B$, maka $D \neq S$. Oleh karena itu, $D/B$ merupakan $R$-submodul

maksimal tunggal dari $S/B$. Dengan demikian, $(S/B)/(D/B) \cong (S/D)_R$ merupakan modul sederhana. Dapat dibentuk rantai

$$0 \subset D/B \subset S/B$$

yang merupakan deret komposisi dari $U_R$ dengan panjang 2. Berturut-turut faktor komposisinya adalah $(S/B)/(D/B)$ dan $D/B$. Tulis $(S/B)/(D/B) \cong (S/D)_R \cong V$ dan $D/B \cong W$. Diperhatikan bahwa

$$VA = (S/D)A = (SA)/D = S/D = V$$
$$WA = (D/B)A \subseteq B/B = 0.$$

Dengan demikian, $V \neq W$. Selanjutnya diambil himpunan yang terdiri dari sebanyak $n$ ideal kanan maksimal $B_i$ sedemikian sehingga $\cap B_i = A$ dan $S/B_i \cong U$. Dibentuk $D_i = \{d \in S \mid dA \subseteq B_i\}$. Dari penjelasan sebelumnya, $D_i/B_i$ merupakan submodul maksimal dan $D_i/B_i \cong W$. Selanjutnya diperhatikan

$$\cap D_i = \cap\{d \in S \mid dA \subseteq B_i\} = \{d \in S \mid dA \subseteq A\} = R$$

Dengan Teorema Sisa Tiongkok,

$$W^{(n)} \cong \oplus D_i/B_i \cong (\cap D_i)/(\cap B_i) \cong R/A$$

Terakhir, karena $S/A \cong U^{(n)}$ dan $R/A \cong W^{(n)}$ maka $S/R \cong V^{(n)}$.

(3) Misalkan $Y_R$ modul sederhana, akan ditunjukkan bahwa $Y \ncong U$ atau $Y \cong V$ atau $Y \ncong W$. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa pembuktian poin 3 ini cukup dengan menunjukkan bahwa $Y$ merupakan faktor komposisi dari suatu $S$-modul dengan panjang berhingga.

Diambil sebarang $S$-modul $M$ yang mempunyai panjang berhingga. Misalkan $M_{k+1}/M_k$ faktor komposisi dari $M$. Jelas $(M_{k+1}/M_k)_S$ modul sederhana.

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k \subsetneq M_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M.$$

(a) Kasus $(M_{k+1}/M_k)_S \cong U_S$ (dengan $U_S$ telah dijelaskan di poin sebelumnya). Didapat bahwa $(M_{k+1}/M_k)_R$ bukan modul sederhana dan mempunyai faktor komposisi yang isomorfis dengan $V$ dan $W$. Katakan $W \cong P/M_k$ dan $V \cong M_{k+1}/P$

$$0 \subsetneq P/M_k \subsetneq M_{k+1}/M_k.$$

Dengan demikian, didapat deret komposisi $M$ atas ring $R$ dapat diperpanjang sebagai berikut

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k \subseteq P \subsetneq M_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M.$$

Akibatnya, $V$ dan $W$ juga merupakan faktor komposisi dari $M_R$.

(b) Kasus $(M_{k+1}/M_k)_S \ncong U_S$. Dari poin (i), didapat bahwa $(M_{k+1}/M_k)_R$ modul sederhana. Artinya $(M_{k+1}/M_k)$ tetap merupakan faktor komposisi dari $M_R$.

Diperhatikan modul sederhana $Y_R$. Misalkan $Y \cong R/E$ untuk suatu ideal kanan maksimal $E$ di $R$. Diasumsikan bahwa $Y \ncong V$. Telah diketahui bahwa $(S/R)_R$ mempunyai panjang berhingga. Demikian pula karena $R/E$ sederhana, maka mempunyai panjang berhingga. Dengan demikian, $(S/E)_R$ juga memiliki panjang berhingga dan salah satu komposisi faktornya, yaitu $R/E$ isomorfis dengan $Y$.

Selanjutnya diperhatikan $R$-modul $ES/E$ sebagai submodul dari $S/E$. Karena $S/E$ mempunyai panjang berhingga, demikian pula $ES/E$. Akan dibuktikan bahwa semua faktor komposisi dari $ES/E$ tidak isomorfis dengan $Y$. Diperhatikan

$$ES/E \cong E \otimes_R S/R = \sum_{e \in E} e \otimes (S/R)$$

Setiap bentuk $e \otimes (S/R)$ merupakan image homomorfis dari $(S/R) \cong V^{(n)}$. Oleh karena itu, semua faktor komposisi dari $ES/E$ isomorfis dengan $V$, yang menurut asumsi, tidak isomorfis dengan $Y$. Terakhir, diperhatikan bahwa $S/ES \cong (S/E)(ES/E)$. Karena $S/E$ mempunyai faktor $R$-komposisi yang isomorfis dengan $Y$, sedangkan $ES/E$ tidak, berarti $(S/ES)_S$ mempunyai faktor $R$-komposisi yang isomorfis dengan $Y$.

□

Dari teorema di atas, diberikan notasi baru untuk pembuat ideal mendasar sebagai berikut.

**Definisi 4.5.** *Jika $R = \mathbb{I}_S(A)$ pembuat ideal mendasar tipe $U$ dan $U_R$ terdekomposisi dengan panjang 2 dan faktor-faktornya adalah $V$ dan $W$, maka dapat ditulis $U = [VW]$ dan dapat dikatakan bahwa $R$ memotong (slices) $U$ menjadi $[VW]$.*

Hasil berikutnya memperhatikan sifat-sifat modul sederhana $V$ dan $W$.

**Proposisi 4.6.** *Diberikan $R = \mathbb{I}_S(A)$ pembuat ideal mendasar tipe $U = [VW]$. Dengan memandang $W$ sebagai submodul dari $U_S$, maka*

$$R = \{s \in S \mid Ws \subseteq W\}; \qquad A = ann_S(W); \qquad W = ann_U(A)$$

*Bukti.* (1) Jelas bahwa $Wr \subseteq W$ untuk setiap $r \in R$. Dengan demikian, $R \subseteq \{s \in S \mid Ws \subseteq W\}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\{s \in S \mid Ws \subseteq W\} \subseteq R$. Submodul $W$ dapat diganti dengan $W^{(n)}$ sebagai submodul dari $U^{(n)} \cong S/A$. Dari proposisi sebelumnya, $W^{(n)} \cong (R/A)_R$. Oleh karena itu, cukup dibuktikan bahwa $\{s \in S \mid (R/A)s \subseteq R/A\} \subseteq R$. Diambil sebarang $s \in S$ yang mempunyai sifat $(R/A)s \subseteq R/A$. Artinya $rs \in R$ untuk setiap $r \in R$. Karena pembuat ideal memuat 1, berarti berlaku $s = 1s \in R$.

(2) Akan dibuktikan bahwa $\text{ann}_S(W) \subseteq A$. Karena $W^{(n)} \cong R/A$, cukup dibuktikan bahwa $\text{ann}_S(R/A) \subseteq A$. Diambil sebarang $s \in \text{ann}_S(R/A)$, artinya $s(R/A) = 0$. Diperoleh $sR \subseteq A$. Karena pembuat ideal memuat 1, maka $s = s1 \in A$.

(3) Akan dibuktikan bahwa $\text{ann}_U(A) \subseteq W$. Modul $U$ dan submodul $W$ berturut-turut dapat digantikan oleh $S/A$ dan $R/A$. Ambil sebarang $s + A \in S/A$ sedemikian sehingga $(s + A)A = 0_{S/A}$. Diperoleh $sA \subseteq A$. Dengan demikian, $s \in \mathbb{I}_S(A) = R$. Jadi, $s + A \in R/A$.

□

Dari Proposisi 3.7 dan 3.8, diperoleh bahwa untuk sebarang $S$-modul $X$ berlaku $X \otimes_R S \cong X \otimes_R A \cong X$. Berikut diberikan sifat hasil penensoran pada $V$ dan $W$.

**Proposisi 4.7.** *Diberikan $R = \mathbb{I}_S(A)$ pembuat ideal mendasar tipe $U = [VW]$. Berlaku*

(1) $VA = V$ *dan* $WA = 0$
(2) $V \otimes_R S = 0$ *dan* $V \otimes_R A = U$
(3) $W \otimes_R S = U$ *dan* $W \otimes_R A = 0$.

*Bukti.* (1) Menurut Proposisi 4.6, diperoleh $W = \text{ann}_U(A)$. Dengan demikian, $WA = 0$. Di lain pihak, menurut Teorema 4.4, didapat $S/R \cong V^{(n)}$. Karena $A$ merupakan ideal kanan generatif, berarti berlaku $SA = S$. Diperoleh $V^{(n)}A \cong (S/R)A \cong S/R \cong V^{(n)}$. Dengan demikian, $VA = V$.

(2) Dari Proposisi 3.6, diperoleh $(S/R) \otimes S = 0$ dan $(S/R) \otimes A = S/A$. Karena $S/R \cong V^{(n)}$ dan $S/A \cong U^{(n)}$, diperoleh $V \otimes_R S = 0$ dan $V \otimes_R A = U$.

(3) Dari Proposisi 3.6, diperoleh $(R/A) \otimes S = S/A$ dan $(R/A) \otimes A = 0$. Karena $R/A \cong W^{(n)}$ dan $S/A \cong U^{(n)}$, diperoleh $W \otimes_R S = U$ dan $W \otimes_R A = 0$.

□

Selanjutnya diberikan ketunggalan suatu sifat dari $V$ dan $W$ sebagai akibat dari Proposisi sebelumnya.

**Akibat 4.8.** *Diberikan $R = \mathbb{I}_S(A)$ pembuat ideal mendasar tipe $U = [VW]$. Berlaku*

(1) *$V$ merupakan $R$-modul sederhana tunggal yang bersifat $V \otimes_R S = 0$.*
(2) *$W$ merupakan $R$-modul sederhana tunggal yang bersifat $W \otimes_R A = 0$.*
(3) *Kelas-kelas isomorfisma $R$-modul sederhana sama dengan kelas-kelas isomorfisma $S$-modul sederhana, dengan modul $U$ diganti dengan $V$ dan $W$.*

*Bukti.* (1) Diambil sebarang $R$-modul sederhana $X$. Ada tiga kemungkinan yaitu $X \cong V$, $X \cong W$ sebagai $R$-modul atau $X \ncong U$ sebagai $S$-modul. Menurut Proposisi 3.7 dan 3.8, $X \otimes_R A \cong X \otimes_R S \cong X$. Sementara itu dari proposisi sebelumnya, $W \otimes_R S = U$ dan $V \otimes_R S = 0$. Jadi, satu-satunya $R$-modul sederhana yang mempunyai sifat tersebut adalah $V$.

(2) Diambil sebarang $R$-modul sederhana $X$. Ada tiga kemungkinan yaitu $X \cong V$, $X \cong W$ sebagai $R$-modul atau $X \ncong U$ sebagai $S$-modul. Menurut Proposisi 3.7 dan 3.8, $X \otimes_R A \cong X \otimes_R S \cong X$. Sementara itu dari proposisi sebelumnya, $W \otimes_R S = U$ dan $V \otimes_R S = 0$. Jadi, satu-satunya $R$-modul sederhana yang mempunyai sifat tersebut adalah $W$.

(3) Dari hasil poin 1 dan 2, didapat bahwa setiap diambil dua di antara $V$, $W$ dan $X$ tidak ada yang saling isomorfis. Oleh karena itu, cukup dibuktikan bahwa jika $Y_S$ modul sederhana dan $Y_S \neq X_S$, maka $Y_R \neq X_R$. Menurut Proposisi 3.7, $\text{Hom}_R(X, Y) = \text{Hom}_S(X, Y) = 0$. Akibatnya satu-satunya $R$-modul homomorfisma dari $X$ ke $Y$ hanyalah homomorfisma nol. Dengan demikian $X_R \ncong Y_R$.

□

**Lemma 4.9.** *Diberikan $R = \mathbb{I}_S(A)$ pembuat ideal mendasar tipe $U = [VW]$. Jika $M$ merupakan $R$-submodul dari suatu $S$-modul, maka terdapat diagram komutatif yang baris-barisnya merupakan barisan eksak sebagai berikut*

$$\begin{array}{ccccc} M/MA & \hookrightarrow & MS/MA & \twoheadrightarrow & MS/M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W^{(a)} & \hookrightarrow & U^{(a)} & \twoheadrightarrow & V^(a) \end{array}$$

*dengan pemetaan vertikal merupakan isomorfimsma dan a berhingga jika $M_R$ dibangun secara berhingga.*

*Bukti.* Karena $M$ merupakan $R$-modul kanan, dapat ditulis $M = MR$. Karena $MR$ merupakan submodul dari suatu $S$-modul, maka dapat dibentuk monomorfisma $MR \to MS$. Didapat barisan eksak

$$M/MA \hookrightarrow MS/MA \twoheadrightarrow MS/MR$$

Mengingat bahwa $(MS/MA)_S \cong M \otimes_R (S/A) = \sum_{m\in M} m \otimes_R (S/A)$. Di lain pihak, modul $m \otimes_R (S/A) \cong S/A \cong U^{(n)}$. Oleh karena itu, $(MS/MA)_S \cong U^{(a)}$ untuk suatu bilangan kardinal $a$.

Jika $M_R$ dibangun secara berhingga oleh sebanyak $q$ elemen, didapat $(MS/MA)_S \cong \sum_{i=1}^{q} m \otimes_R (S/A) \cong U^{(nq)}$. Dengan demikian, nilai $a$ berhingga. Dengan cara sama,

$$(MR/MA)_R \cong M \otimes_R (R/A) = \sum_{m\in M} m \otimes_R (S/A) \cong W^{(c)}$$

untuk suatu bilangan cardinal $c$. Demikian pula

$$(MS/MR)_R \cong M \otimes_R (S/R) = \sum_{m\in M} m \otimes_R (S/R) \cong V^{(b)}$$

untuk suatu bilangan cardinal $b$. Diperoleh barisan eksak pendek

$$0 \to W^{(c)} \xrightarrow{\phi} U^{(a)} \xrightarrow{\psi} V^{(b)} \to 0.$$

Karena barisan di atas eksak, diperoleh kesamaan $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\phi) = W^{(c)}$ dan $\mathrm{Im}(\psi) = V^{(b)}$. Karena $V \ncong W$, berarti $\mathrm{Im}(\psi) = V^{(b)}$ tidak memuat salinan dari $W$. Oleh karena itu seluruh $W^{(a)} \subset U^{(a)}$ dipetakan ke 0. Dengan demikian, $\mathrm{Ker}(\psi) = W^{(a)}$. Jadi, $a = c$. Sementara itu, karena $\mathrm{Ker}(\psi) = W^{(c)}$ tidak memuat salinan $V$, berarti seluruh faktor komposisi $V^{(a)}$ dipetakan ke $V^{(b)}$ secara bijektif. Jadi, $a = b$. □

## 5. PENUTUP

Beberapa hal yang dapat dilakukan untuk penelitian selanjutnya adalah

(1) menyelidiki sifat-sifat lainnya pada modul yang terawetkan jika ring tumpuannya diganti pembuat ideal mendasar,
(2) menyelidiki sifat-sifat lainnya pada ring yang terawetkan antara ring tersebut dengan pembuat ideal mendasar.

## References

[1] Levy, L.S. dan Robson, J. C., 2010, *Hereditary Noetherian Prime Rings and Idealizers*, American Mathematical Society, Rhode Island, US.

KHOLIDA KHOIRUNNISA* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
kkholida@gmail.com

INDAH EMILIA WIJAYANTI
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
ind_wijayanti@ugm.ac.id

SUTOPO
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
sutopo_mipa@ugm.ac.id