Jurnal Matematika Thales (JMT): 2020 ISSN: 2715-1891
Vol. 02 No. 02

PERINORMALITAS DI DAERAH KRULL

(PERINORMALITY ON KRULL DOMAINS)

Qonita Qurrota A'yun*, Sri Wahyuni

Abstract. An integral domain R is said to be perinormal if whenever T is a local overring of R such that the inclusion $R \subseteq T$ satisfies going-down, it follows that T is a localization of R necessarily at a prime ideal. Perinormality is one of integral closedness property. As the integral closure of any Noetherian normal domain is Krull, it will be shown that perinormality is a generalization of Krull domains.
Keywords: localization, going-down, perinormal, Krull domain.

Abstrak. Daerah integral R dikatakan perinormal jika untuk setiap overring lokal T dari R yang memenuhi kondisi *going-down*, maka T merupakan lokalisasi dari R pada ideal prima. Perinormalitas merupakan salah satu sifat ketertutupan integral. Dengan memperhatikan bahwa klosur integral dari daerah normal Noether merupakan daerah Krull, pada penelitian ini akan ditunjukkan bahwa perinormalitas merupakan generalisasi dari daerah Krull.
Kata-kata kunci: lokalisasi, *going-down*, perinormal, daerah Krull.

1. PENDAHULUAN

Misal diberikan suatu daerah integral R dengan ring hasil bagi K. Setiap ring T yang memenuhi $R \subseteq T \subseteq K$ disebut dengan *overring*. Sebagai contoh, ring bilangan rasional diadik merupakan overring dari daerah integral $\mathbb{Z}$.

Misalkan T adalah overring dari R. Salah satu hubungan antara ideal-ideal prima di R dengan ideal-ideal prima di T dinyatakan dalam Teorema Lying-over dan Teorema Going-down [1]. Pada penulisan ini, ideal prima di overring T dinotasikan dengan huruf P biasa, adapun ideal prima di daerah integral R dinotasikan dengan $\mathfrak{p}$.

Misalkan P ideal prima di T dan $\mathfrak{p}$ ideal prima di R. Ideal P dikatakan memenuhi kondisi *lying-over* atas $\mathfrak{p}$ jika $\mathfrak{p}$ merupakan penyusutan dari P di R, dinotasikan dengan $\mathfrak{p} = P \cap R$ [7]. Suatu perluasan $R \subseteq T$ dikatakan memenuhi *kondisi turun (going-down)* jika berlaku Teorema Going-down pada rantai ideal primanya, yaitu untuk sebarang

2010 Mathematics Subject Classification: 13G05, 13B30 ideal prima $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ di R dan ideal prima Q di T sedemikian sehingga $Q \cap R = \mathfrak{q}$, terdapat ideal prima P di T sedemikian sehingga $P \subset Q$ dan $P \cap R = \mathfrak{p}$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dash, dashed, "\mathfrak{p} = P \cap R"'] & \subset & Q \arrow[d, dash, dashed, "\mathfrak{q} = Q \cap R"] & \text{ideal prima di overring } T \\ \mathfrak{p} & \subset & \mathfrak{q} & \text{ideal prima di daerah integral } R \end{tikzcd}$$

Lebih lanjut, R dinamakan daerah turun *(going-down domain)* jika setiap overring dari R memenuhi kondisi turun [3].

Dengan menggunakan konsep turun tersebut, Epstein dan Saphiro (2016) untuk pertama kalinya mendefinisikan konsep perinormalitas [3]. Istilah perinormalitas mengacu pada sifat-sifat perinormal di daerah integral. Daerah integral R dikatakan *perinormal* jika setiap overring lokal dari R yang memenuhi kondisi turun merupakan lokalisasi pada ideal prima. Untuk overring yang tidak disyaratkan lokal, akan memotivasi pendefinisian daerah *perinormal global*. Penamaan perinormal berkaitan dengan konsep normal Noether yang biasa digunakan untuk ketertutupan integral [3, Teorema 3.10]. Dengan memperhatikan bahwa klosur integral dari daerah normal Noether merupakan daerah Krull [4], hal ini memotivasi untuk menyelidiki perinormalitas di daerah Krull.

Penelitian ini merupakan studi literatur yang bersifat teoritis. Mula-mula diberikan definisi daerah perinormal dan daerah perinormal global menurut Epstein dan Saphiro [3]. Diberikan pula definisi daerah Krull dan daerah Krull tergeneralisasi [3] dengan memperhatikan ideal-ideal prima [6], [8]. Selanjutnya, akan dikaji hubungan antara daerah perinormal dan daerah Krull tergeneralisasi [3] dengan memanfaatkan Teorema Mori-Nagata [4]. Pada bagian akhir, akan dipaparkan hubungan antara daerah perinormal global dan daerah Krull dengan memanfaatkan grup kelas pembagi torsi [5].

2. PERINORMALITAS

Misalkan R daerah integral dan T overring dari R. Overring T dikatakan *flat atas* R jika $T_M = R_{M \cap R}$ untuk setiap ideal maksimal M di T [11, Teorema 2]. Lebih lanjut, jika T flat atas R, maka T merupakan suatu lokalisasi dari R pada suatu ideal prima. Hal ini juga berarti bahwa T overring lokal. Menurut Matsumura pada [10, Teorema 9.5], setiap overring flat memenuhi kondisi turun. Dengan demikian, jika T flat, maka T memenuhi kondisi turun dan merupakan lokalisasi dari R pada suatu ideal prima. Timbul pertanyaan bagaimana jika situasi ini terjadi untuk setiap overring lokal dari R. Oleh Epstein dan Saphiro [3], daerah yang memenuhi kondisi tersebut disebut sebagai daerah perinormal.

Perinormal.
Berikut diberikan definisi daerah perinormal dengan memperhatikan setiap overring lokal yang memenuhi kondisi turun.

Definisi 2.1 ([3]). *Daerah integral R disebut daerah **perinormal** jika untuk sebarang overring lokal T dari R sedemikian sehingga inklusi $R \subseteq T$ memenuhi kondisi turun, maka T merupakan suatu lokalisasi dari R pada suatu ideal primanya.*

Epstein dan Saphiro dalam [3, Proposisi 2.4] memberikan karakterisasi bahwa suatu daerah integral R merupakan daerah perinormal dengan syarat untuk setiap overring T dari R yang memenuhi kondisi turun berlaku T flat atas R.

Misalkan $\mathrm{Spec}(R)$ menyatakan himpunan semua ideal prima di R. Misalkan pula notasi $\mathrm{Spec}^1(R)$ menyatakan himpunan semua ideal prima di R dengan *height*-1. Suatu ring R disebut mempunyai sifat karakter berhingga jika untuk setiap elemen tak nol $r \in R$, himpunan $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^1(R) \mid r \in \mathfrak{p}\}$ berhingga. Dengan menggunakan notasi dan pengertian tersebut, diberikan definisi daerah Krull dan daerah Krull tergeneralisasi.

Definisi 2.2 ([3]). *Daerah integral R disebut daerah Krull jika memenuhi*

(i) $R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^1(R)} R_{\mathfrak{p}}$,
(ii) R mempunyai sifat karakter berhingga,
(iii) $R_{\mathfrak{p}}$ merupakan daerah valuasi diskrit untuk setiap $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^1(R)$, dengan $R_{\mathfrak{p}}$ menotasikan ring lokalisasi R pada ideal prima $\mathfrak{p}$.

Jika untuk setiap $R_{\mathfrak{p}}$ pada poin (iii) merupakan daerah valuasi (tidak harus diskrit), maka R disebut dengan daerah Krull tergeneralisasi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa perinormalitas merupakan generalisasi dari daerah Krull. Mula-mula diberikan proposisi berikut yang menyatakan bahwa suatu ring hasil bagi dari daerah Krull tergeneralisasi juga merupakan daerah Krull tergeneralisasi.

Proposisi 2.3 ([6], Akibat 43.6). *Jika R daerah Krull tergeneralisasi dan S sistem multiplikatif di R, maka R_S juga merupakan daerah Krull tergeneralisasi.*

Selanjutnya, berdasarkan [4] pada Teorema Mori-Nagata, klosur integral dari sebarang daerah Noether merupakan daerah Krull. Dengan memperhatikan bahwa daerah normal adalah daerah yang tertutup secara integral di lapangan hasil baginya [9], berarti diperoleh bahwa setiap daerah normal Noether merupakan daerah Krull [10, Teorema 12.4(i)].

Misalkan (R_1) menotasikan daerah R sedemikian sehingga $R_{\mathfrak{p}}$ merupakan daerah valuasi untuk setiap $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^1(R)$. Diberikan lemma dan proposisi berikut sebelum membuktikan teorema selanjutnya.

Lemma 2.4 ([3], Lemma 3.7). *Misalkan R daerah integral dan T overring dari R. Jika $P \in \mathrm{Spec}(T)$ sedemikian hingga $V = R_{P \cap R}$ adalah suatu daerah valuasi berdimensi 1, maka $R_{P \cap R} = T_P$ subring dari lapangan hasil bagi K di R dan $P \in \mathrm{Spec}^1(T)$.*

Proposisi 2.5 ([3], Proposisi 3.9). *Diberikan daerah* (R_1). *Jika* T *suatu overring dari* R *sedemikian sehingga perluasan* $R \subseteq T$ *memenuhi kondisi turun, maka* T *memenuhi* (R_1)*, dan pemetaan* $\mathrm{Spec}(T) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ *menginduksikan pemetaan injektif* $\mathrm{Spec}^1(T) \longrightarrow \mathrm{Spec}^1(R)$ *dengan image petanya terdirinya dari ideal-ideal prima* $\mathfrak{p}$ *di* R *dengan height-*1 *sedemikian sehingga* $\mathfrak{p}T \neq T$.

Berikut diberikan teorema utama bagian ini.

Teorema 2.6 ([3]). *Jika* R *daerah Krull tergeneralisasi, maka* R *perinormal.*

Bukti. Misalkan T suatu overring lokal dari R dengan ideal maksimal M sedemikian sehingga inklusi $R \subseteq T$ memenuhi kondisi turun. Misalkan $\mathfrak{q} = M \cap R$. Karena R daerah Krull tergeneralisasi, berarti berdasarkan Proposisi 2.3 didapat $R_\mathfrak{q}$ juga merupakan daerah Krull tergeneralisasi. Karena inklusi $R \subseteq T$ memenuhi kondisi turun, akibatnya pemetaan $\mathrm{Spec}(T) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R_\mathfrak{q})$ bersifat surjektif. Berdasarkan Proposisi 2.5, diperoleh pemetaan bijektif $\mathrm{Spec}^1(T) \longrightarrow \mathrm{Spec}^1(R_\mathfrak{q})$. Selanjutnya untuk menghindari kerancuan, penulisan ideal prima di $\mathrm{Spec}^1(R_\mathfrak{q})$ dinotasikan dengan $\mathfrak{P}$. Diambil sebarang $P \in \mathrm{Spec}^1(T)$ dan ideal $\mathfrak{P} = P \cap R$ di $\mathrm{Spec}^1(R_\mathfrak{q})$ yang berkorespondensi. Menurut Lemma 2.4, diperoleh $(R_\mathfrak{q})_\mathfrak{P} = T_P$. Dengan demikian, $R_\mathfrak{q} \subseteq T \subseteq \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}^1(T)} T_P = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}^1(R_\mathfrak{q})} (R_\mathfrak{q})_\mathfrak{P} = R_\mathfrak{q}$. Jadi, $T = R_\mathfrak{q}$. Dengan kata lain, R perinormal. □

Mengingat bahwa setiap daerah Krull merupakan daerah Krull tergeneralisasi, maka berdasarkan Teorema 2.6 di atas diperoleh bahwa daerah perinormal merupakan generalisasi dari daerah Krull.

Diperhatikan kembali Definisi 2.1. Suatu daerah integral didefinisikan sebagai daerah perinormal dengan memperhatikan setiap overring lokal dari daerah integral tersebut. Untuk kasus overring yang lebih umum, yaitu overring yang tidak disyaratkan lokal, hal ini memunculkan pendefinisian daerah perinormal global.

Perinormal Global.

Definisi 2.7 ([3]). *Daerah integral* R *disebut daerah* ***perinormal global*** *jika untuk sebarang overring* T *dari* R *sedemikian sehingga inklusi* $R \subseteq T$ *memenuhi kondisi turun, maka* T *merupakan suatu lokalisasi dari* R *pada suatu himpunan multiplikatifnya*

Setiap daerah perinormal global merupakan daerah perinormal [3]. Untuk arah sebaliknya, proposisi berikut menyatakan syarat perlu dan cukup suatu daerah perinormal global dengan memanfaatkan karakter overring flat terhadap lokalisasi. Hasil dari proposisi ini akan digunakan untuk membuktikan teorema selanjutnya.

Proposisi 2.8 ([3], Proposisi 6.2). *Misalkan* R *daerah perinormal. Daerah* R *merupakan daerah perinormal global jika dan hanya jika setiap overring flat dari* R *merupakan suatu lokalisasi dari* R.

Selanjutnya diberikan teorema yang memberikan syarat cukup agar suatu daerah Krull R merupakan daerah perinormal global dengan memanfaatkan sifat torsi dari grup kelas pembagi $\mathscr{C}(R)$.

Teorema 2.9 ([3])**.** *Misalkan R daerah Krull. Jika grup kelas pembagi $\mathscr{C}(R)$ dari R adalah torsi, maka R perinormal global.*

Bukti. Diberikan daerah Krull R. Dengan memanfaatkan Proposisi 2.8 dan Teorema 2.6, cukup ditunjukkan bahwa setiap overring flat dari R merupakan suatu lokalisasi dari R. Diambil sebarang overring flat T dari R. Karena T flat atas R, berarti $T_M = R_{M\cap R}$ untuk setiap ideal maksimal M di T. Hal ini juga berarti bahwa $T = \cap R_{\mathfrak{p}}$ untuk setiap ideal prima $\mathfrak{p}$ di R. Diperhatikan bahwa suatu daerah Krull mempunyai grup kelas pembagi torsi jika dan hanya jika setiap ideal divisorial primanya (yaitu ideal prima dengan *height*-1) merupakan radikal dari suatu ideal utama. Hal ini mengakibatkan R mempunyai grup kelas pembagi torsi jika dan hanya jika setiap sublokalisasi atas R merupakan lokalisasi dari R. Karena R diasumsikan mempunyai grup kelas pembagi torsi, berarti setiap irisan lokalisasi-lokalisasi dari R pada ideal primanya merupakan suatu lokalisasi dari R. Oleh karena itu, T merupakan lokalisasi dari R. Dengan kata lain, R perinormal global. □

Untuk arah sebaliknya dari Teorema 2.9 di atas, akan berlaku dengan tambahan asumsi, yaitu khusus untuk daerah Krull berdimensi satu. Akan ditunjukkan pada proposisi di bawah ini bahwa suatu daerah Krull berdimensi satu merupakan daerah Dedekind. Oleh Matsumura [10], daerah Dedekind adalah daerah integral sedemikian sehingga setiap ideal tak nolnya invertibel. Lebih lanjut, daerah Dedekind yang bukan merupakan lapangan adalah daerah normal Noether berdimensi satu [10, Teorema 11.6]. Berdasarkan hal tersebut, dibuktikan proposisi berikut.

Proposisi 2.10 ([10])**.** *Daerah R merupakan daerah Krull berdimensi satu jika dan hanya jika R daerah Dedekind.*

Bukti. Misalkan R daerah Dedekind, berarti R merupakan daerah Noether normal, yang berarti juga merupakan daerah Krull. Sebaliknya, misalkan R daerah Krull berdimensi satu, akan ditunjukkan bahwa R Noether. Diambil sebarang ideal tak nol I di R. Misalkan a elemen tak nol di I. Jika dapat ditunjukkan bahwa R/aR Noether, maka I/aR dibangun secara berhingga, yang berarti I juga dibangun secara berhingga. Karena R Krull, berarti ideal utama aR dapat dinyatakan sebagai $aR = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ dengan $\mathfrak{q}_i$ menyatakan perpangkatan dari ideal-ideal prima $\mathfrak{p}_i$ sedemikian sehingga $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ jika $i \neq j$. Karena $\dim(R) = 1$, berarti setiap $\mathfrak{p}_i$ merupakan ideal maksimal. Dengan demikian,

$$R/aR = R/\mathfrak{q}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{q}_r.$$

Diperhatikan bahwa $R/\mathfrak{q}_i$ ring lokal dengan ideal maksimal $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{q}_i$, yang berarti $R/\mathfrak{q}_i \cong R_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{q}_i R_{\mathfrak{p}_i}$. Karena setiap $R_{\mathfrak{p}_i}$ merupakan ring valuasi diskrit, berarti R/aR Noether. Oleh karena itu, R daerah Noether berdimensi satu dan normal. Jadi, R Dedekind. □

Misalkan R daerah Dedekind dan $\mathfrak{m}$ ideal maksimal di R, maka $R_{\mathfrak{m}}$ merupakan ring valuasi diskrit rank-1 dan R merupakan irisan dari semua $R_{\mathfrak{m}}$ tersebut. Dengan kata lain, $\cap R_{\mathfrak{m}} = R$ jika dan hanya jika $\mathfrak{m}$ berjalan untuk semua ideal prima di R. Misalkan T adalah overring dari R, berarti T juga daerah Dedekind. Lebih lanjut, jika $\mathfrak{p}$ ideal prima di R sedemikian sehingga $\mathfrak{p}T \neq T$, maka $\mathfrak{p}T$ ideal maksimal di T. Kondisi ini berlaku untuk setiap ideal maksimal di T. Selanjutnya, ring hasil bagi dari T pada ideal $\mathfrak{p}T$ (dengan $\mathfrak{p}T \neq T$) tidak lain adalah $R_{\mathfrak{p}}$.

Misalkan A himpunan semua ideal maksimal di R, notasi R^A menyatakan irisan dari semua $R_{\mathfrak{p}}$, dengan $\mathfrak{p}$ berjalan untuk ideal-ideal prima yang tidak termuat di A. Diperoleh $\mathfrak{p}R^A = R^A$ untuk $\mathfrak{p} \in A$. Dengan asumsi demikian, diberikan proposisi berikut.

Proposisi 2.11 ([5]). *Pernyataan-pernyataan berikut saling ekuivalen:*

(i) Setiap overring dari R merupakan ring hasil bagi dari R.
(ii) Grup kelas ideal dari R merupakan grup torsi.

Bukti. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Misalkan $\mathfrak{p}$ sebarang ideal prima di R. Dibentuk R^A dengan A merupakan himpunan singleton yang hanya memuat $\mathfrak{p}$. Karena R^A ring hasil bagi dari R dan $R^A \neq R$, berarti terdapat elemen tak unit di R yang merupakan unit di R^A. Karena kasus ini berlaku untuk setiap ideal prima di R, berarti grup kelas ideal di R merupakan grup torsi.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ Misalkan T overring dari R. Dibentuk himpunan $\mathfrak{m}$ yang memuat semua elemen di R yang merupakan unit di T. Berarti $\mathfrak{m}$ merupakan subset multiplikatif. Akan ditunjukkan bahwa T merupakan ring hasil bagi dari R terhadap subset multiplikatif $\mathfrak{m}$, yaitu $T = R_{\mathfrak{m}}$. Jelas bahwa $R_{\mathfrak{m}} \subseteq T$. Diambil sebarang elemen $x \in T$. Dibentuk $xR = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ dengan $\mathfrak{a}$ dan $\mathfrak{b}$ ideal integral (yaitu $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideal yang termuat di R) sedemikian sehingga $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$. Berarti $\mathfrak{a}T + \mathfrak{b}T = T$. Karena $x \in T$, diperoleh pula $\mathfrak{a}T = x\mathfrak{b}T$. Oleh karena itu, $\mathfrak{b}T = T$. Berdasarkan asumsi bahwa grup kelas ideal dari R merupakan grup torsi, diperoleh $\mathfrak{b}^n = bR$ untuk suatu bilangan bulat positif n. Selanjutnya, karena $\mathfrak{b}T = T$ didapat $bT = T$ yaitu $b \in \mathfrak{m}$. Akan tetapi diperhatikan bahwa $x\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \subset R$, sehingga $xb \in R$ yang berarti $x \in R_{\mathfrak{m}}$. Jadi, $T = R_{\mathfrak{m}}$. □

Dengan memanfaatkan Proposisi 2.11 di atas, dapat ditunjukkan teorema berikut.

Teorema 2.12 ([3]). *Misalkan R merupakan daerah Krull dengan* $\dim(R) = 1$. *Jika R perinormal global, maka grup kelas pembagi $\mathscr{C}(R)$ dari R adalah torsi.*

Bukti. Diketahui bahwa R perinormal global dengan $\dim(R) = 1$. Karena R daerah Krull dan berdimensi 1, berarti R merupakan daerah Dedekind. Karena R perinormal global, berarti setiap overring dari R merupakan suatu lokalisasi dari R. Berdasarkan Proposisi 2.11, hal ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa grup kelas pembagi $\mathscr{C}(R)$ adalah torsi. □

3. PENUTUP

Daerah perinormal merupakan generalisasi dari daerah Krull (Teorema 2.6). Akan tetapi, tidak semua daerah Krull merupakan daerah perinormal global. Diperlukan peran grup kelas pembagi untuk menunjukkan kapan suatu daerah Krull merupakan daerah perinormal global (Teorema 2.9). Arah sebaliknya berlaku untuk daerah Krull berdimensi satu dengan memanfaatkan daerah Dedekind (Teorema 2.12).

Bagan berikut menunjukkan hubungan antara daerah perinormal, perinormal global, Krull, dan Krull tergeneralisasi.

$$\begin{tikzcd}
\text{Krull} \arrow[d] & \text{Krull, dengan grup kelas pembagi torsi} \arrow[l] \arrow[r] & \text{Perinormal global} \arrow[d] \\
\text{Krull tergeneralisasi} \arrow[rr] & & \text{Perinormal}
\end{tikzcd}$$

Figure 1. Hubungan antara daerah perinormal, perinormal global, Krull, dan Krull tergeneralisasi

Ucapan terima kasih*. Terima kasih sebesar-besarnya kepada Epstein N. dan Saphiro J. atas penelitiannya yang menjadi sumber inspirasi utama dalam penulisan ini. Penulis sepenuhnya menyadari bahwa pada tulisan ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, kami akan sangat berterima kasih jika diberikan saran atau masukan.

References

[1] Cohen, I. S., dan Seidenberg A., Prime ideals and integral dependence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **110** (1946), hal. 196-212.
[2] Dobbs, D.E., dan Papick, I.J., On going down for simple overrings. III, *Proc. Amer. Math. Soc.* vol. 54. (1976), hal. 35-38.
[3] Epstein, N., dan Shapiro, J., Perinormality - a generalization of Krull Domains, *Journal of Algebra* **451** (2016), hal. 65-84.
[4] Fossum, R.M., The Divisor Class Group of a Krull Domain, *Ergebnisse der Mathematik undihrer Grenzgebiete,* vol. 74, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1974.
[5] Goldman, O., On A Special Class of Dedekind Domains, *Topology* **3** (1964), hal. 113-118.
[6] Gilmer, R., Multiplicative Ideal Theory, *Pure and Applied Mathematics,* vol. 90, Queen's Paper, Kingston Ontario, 1992.
[7] Isaacs, M. I., *Algebra: A Graduate Course,* Brooks-Cole Publishing, 1994.
[8] Larsen, M. D. dan McCarthy, P. J., *Multiplicative Theory of Ideals,* vol. 43, Academic Press, New York and London, 1971.
[9] Matsumura, H., *Commutative Algebra*, Benjamin-Cummings Publishing, Second edition, Massachusetts, 1980.
[10] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
[11] Richman, F., Generalized quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* vol. 16 (1986), hal. 794-799.

Qonita Qurrota A'yun* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
qonita.qurrota@mail.ugm.ac.id

Sri Wahyuni
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
swahyuni@ugm.ac.id