Jurnal Matematika Thales (JMT), 2024
Vol. 06 No. 02

MASALAH PEMROGRAMAN NONLINIER MULTIOBJEKTI DENGAN FUNGSI OBJEKTIF YANG DINORMALKAN (MULTIOBJECTIVE NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH NORMALIZED OBJECTIVE FUNCTION)

KARTIKA KUSUMA SARI*, INDARSIH

Abstract. Each objective function in Multiobjective Nonlinear Programming (MONLP) problems with priorities often has different optimization goals, units, and intervals, which cannot be directly combined. This paper addresses this issue by normalizing the objective functions. Subsequently, MONLP problems with priorities are solved using the weighting method and Fuzzy Goal Programming (FGP) approach. The optimal solutions obtained represent the Pareto optimal solutions for the given problems. Furthermore, the optimal solution of the weighting method with normalized objective functions is equivalent to the optimal solution of the conventional weighting method. This equivalence is demonstrated through Weighting Theorem I MONLP, Weighting Theorem II MONLP, and Weighting Theorem III MONLP. Numerical examples provided also confirm this equivalence.
Keywords: MONLP, Priorities, Weighting Method, FGP.

2010 Mathematics Subject Classification: 90C29

Abstrak. Setiap fungsi objektif pada masalah Pemrograman Nonlinier Multiobjektif (PNLMO) dengan prioritas seringkali memiliki tujuan optimisasi, satuan dan interval yang berbeda, yang tidak dapat digabungkan secara langsung. Dalam makalah ini dilakukan normalisasi fungsi objektif untuk menangani masalah tersebut. Selanjutnya, masalah PNLMO dengan prioritas diselesaikan dengan pendekatan metode pembobotan dan *Fuzzy Goal Programming* (FGP). Solusi optimal yang diperoleh merupakan solusi optimal Pareto dari masalah yang diberikan. Selain itu, solusi optimal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan ekuivalen dengan solusi optimal masalah pembobotan biasa. Hal ini dibuktikan dengan adanya Teorema Pembobotan I PNLMO, Teorema Pembobotan II PNLMO, Teorema Pembobotan III PNLMO. Contoh numerik yang diberikan juga menunjukkan hal yang sama.

Kata-kata kunci: PNLMO, Prioritas, Metode Pembobotan, FGP.

1. PENDAHULUAN

Masalah pengambilan keputusan yang sering terjadi pada bidang ekonomi, sains, industri, teknik dan logistik merupakan masalah optimasi yang kompleks yang tidak dapat dijelaskan secara memadai hanya dengan satu fungsi tujuan atau fungsi objektif. Oleh karena itu, perlu adanya pertimbangan banyak tujuan dalam proses pengambilan keputusan di bawah batasan-batasan atau kendala yang ada melalui optimisasi multiobjektif. Berdasarkan karakteristik dari fungsi objektif dan fungsi kendala yang digunakan dalam perumusan masalah, masalah optimisasi multiobjektif dibedakan menjadi dua, yaitu masalah Pemrograman Linier Multiobjektif (PLMO) dan Pemrograman Nonlinier Multiobjektif (PNLMO). Pada makalah ini dibahas mengenai masalah Pemrograman Nonlinier Multiobjektif (PNLMO).

Misalkan tujuan yang ingin dicapai adalah memaksimumkan keuntungan sekaligus meminimumkan limbah, dengan pencapaian keuntungan maksimum lebih diutamakan. Permasalahan ini merupakan masalah optimisasi multiobjektif dengan prioritas, di mana tujuan mamaksimumkan keuntungan menjadi tujuan yang harus dicapai terlebih dahulu baru kemudian mencapai tujuan meminimumkan limbah. Solusi optimal masalah optimisasi multiobjektif dengan prioritas dapat diperoleh melalui pendekatan metode pembobotan, di mana bobot dari suatu fungsi objektif dipilih secara proporsional dengan prioritas fungsi objektif. Fungsi objektif dengan tingkat prioritas lebih tinggi diberi bobot yang lebih besar. Namun, untuk masalah PNLMO dengan fungsi yang bersifat nonkonveks, metode pembobotan hanya dapat memberikan solusi optimal Pareto lokal. Dengan demikian perlu alternatif lain untuk menyelesaikan masalah PNLMO dengan prioritas khususnya yang melibatkan fungsi nonkonveks.

Dalam aplikasinya, selain memberikan prioritas untuk masing-masing fungsi objektif, pembuat keputusan biasanya juga memiliki target yang ingin dicapai untuk masing-masing fungsi objektif. Namun, penentuan nilai target tidak dapat dilakukan dengan mudah karena mungkin hanya sebagian informasi mengenai tujuan yang dapat diketahui secara pasti. Oleh karena itu, perlu adanya pertimbangan pengambilan keputusan di bawah kondisi yang tidak pasti. Proses pengambilan keputusan tersebut dapat dilakukan dengan melibatkan bilangan *fuzzy* [1]. Dengan demikian dalam makalah ini diberikan alternatif lain untuk menyelesaikan masalah optimisasi multiobjektif dengan prioritas yaitu melalui pendekatan *fuzzy goal programming* (FGP). Penelitian terkait pernah dilakukan oleh Chao, dkk [2], di mana masalah PNLMO dengan prioritas diselesaikan dengan pendekatan FGP melalui metode optimisasi domain. Metode ini memungkinkan adanya normalisasi fungsi objektif, di mana interval fungsi objektif yang semula $[f_i^{min}, f_i^{max}]$ dengan target $f_i^*, i = 1, 2, \ldots, k$ diubah menjadi $[-1, 1]$ jika diinginkan keseimbangan antara memaksimalkan dan meminimalkan fungsi objektif, $[0, 1]$ untuk fungsi objektif dengan tujuan meminimalkan fungsi objektif, dan atau $[-1, 0]$ untuk fungsi objektif dengan tujuan memaksimalkan fungsi objektif, sehingga target untuk semua fungsi objektif adalah sama, yaitu $f_i^* = 0$ untuk semua i dan nilai terburuknya adalah 1 dan atau -1.

Dalam masalah praktis, masing-masing fungsi objektif biasanya memiliki tujuan yang berbeda dan saling bertentangan, misalnya memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan limbah, dua tujuan tersebut tidak dapat digabungkan secara langsung untuk dibentuk fungsi objektif gabungan. Dengan demikian, pada penelitian ini masalah optimisasi multiobjektif dengan prioritas serta fungsi objektif yang telah dinormalkan diselesaikan melalui pendekatan seperti yang dilakukan oleh Chao, dkk (2007), namun proses normalisasi fungsi objektif dilakukan dengan mengubah interval fungsi objektif menjadi $[0, 1]$ untuk semua fungsi objektif dengan tujuan memaksimalkan ataupun meminimalkan fungsi objektif, dengan target untuk semua fungsi objektif adalah sama, yaitu $f_i^* = 0$ untuk semua i dan nilai terburuknya adalah 1. Artinya, semua fungsi objektif memiliki nilai target dan nilai terburuk yang sama. Dengan demikian, penarikan kesimpulan dalam proses pengambilan keputusan lebih mudah untuk dilakukan. Selain itu, interval $[0, 1]$ dianggap dapat mewakili kondisi proses pengambilan keputusan di dunia nyata, di mana keputusan yang dibuat tidak boleh bernilai negatif.

Setiap fungsi objektif biasanya juga memiliki interval nilai yang berbeda. Misalkan, keuntungan yang ingin dicapai tidak kurang dari $Rp.5.000.000$ dan paling banyak $Rp.10.000.000$, dengan jumlah limbah yang dihasilkan tidak lebih dari 15 ton dan minimal 1 ton. Ketika kedua fungsi objektif tersebut diberi bobot untuk membentuk fungsi objektif gabungan, akan lebih baik jika masing-masing fungsi objektif memiliki ukuran interval yang kurang lebih sama [3]. Selain itu, kedua fungsi objektif tersebut juga memiliki satuan yang berbeda, yaitu rupiah untuk fungsi objektif "memaksimumkan keuntungan" dan ton untuk fungsi objektif "meminimumkan limbah". Menggabungkan dua satuan fungsi objektif yang berbeda, seperti rupiah (mata uang) dan ton (massa), adalah hal yang tidak memungkinkan secara langsung karena kedua satuan tersebut mengukur dimensi yang berbeda dan tidak bisa digabungkan secara kuantitatif. Untuk mengatasi permasalahan ini, dilakukan normalisasi fungsi objektif yaitu mengubah interval fungsi objektif yang semula $[f_i^{min}, f_i^{max}], i = 1, 2, \ldots, k$ menjadi $[0, 1]$ sehingga semua fungsi objektif memiliki interval yang sama. Selanjutnya fungsi objektif dengan interval $[0, 1]$ disebut sebagai fungsi objektif yang dinormalkan. Dengan demikian, semua fungsi objektif dapat digabungkan tanpa memandang satuan maupun interval dari masing-masing fungsi objektif.

Pada makalah ini, semua fungsi objektif dari PNLMO dengan prioritas dinormalisasi sehingga berada pada interval $[0, 1]$. Selanjutnya masalah PNLMO dengan prioritas dan fungsi objektif yang dinormalkan diselesaikan dengan pendekatan metode pembobotan dan FGP. Dengan demikian diperoleh beberapa rumusan masalah yang akan dibahas, diantaranya: bagaimana formulasi model FGP dengan fungsi objektif yang dinormalkan untuk menyelesaikan masalah PNLMO dengan prioritas, bagaimana formulasi model masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan untuk menyelesaikan masalah PNLMO dengan prioritas, apakah solusi optimal yang diperoleh dari pendekatan metode pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan ekuivalen dengan solusi optimal metode pembobotan biasa dan merupakan solusi optimal masalah PNLMO dengan prioritas.

2. **Masalah MONLP dengan Prioritas**

Secara umum, masalah PNLMO dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{meminimalkan} \quad f(\boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

$$\text{dengan kendala} \quad \boldsymbol{x} \in X. \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ merupakan n variabel keputusan. $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x}))^T$ merupakan k fungsi objektif. Dan himpunan X merupakan himpunan daerah *feasible* yang didefinisikan sebagai $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \; | g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j = 1, 2, \ldots, m\}$. Dengan fungsi objektif dan atau fungsi kendalanya merupakan fungsi nonlinier.

Masing-masing fungsi objektif pada (2.1) dapat memiliki urutan prioritas yang berbeda. Misalnya, fungsi objektif pertama memiliki prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan fungsi objektif kedua, dan seterusnya. Urutan prioritas fungsi objektif tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$f_{p+1}(\boldsymbol{x}) \prec f_p(\boldsymbol{x}), p = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.3}$$

Definisi 2.1. *(Sakawa, 1993) Titik $\boldsymbol{x}^*$ disebut solusi optimal lengkap masalah PNLMO (2.1)-(2.2) jika terdapat $\boldsymbol{x}^*$ sedemikian sehingga $f_i(\boldsymbol{x}^*) \leq f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, ..., k$, untuk semua $\boldsymbol{x} \in X$.*

Secara umum, solusi optimal lengkap yang secara bersamaan meminimalkan semua fungsi objektif tidak selalu ada ketika fungsi-fungsi objektif saling bertentangan satu sama lain. Dengan demikian, sebuah konsep solusi baru, yang disebut optimalitas Pareto, diperkenalkan dalam pemrograman multiobjektif.

Definisi 2.2. *(Sakawa, 1993) Titik $\boldsymbol{x}^*$ disebut solusi optimal Pareto masalah PNLMO (2.1)-(2.2) jika tidak ada $\boldsymbol{x} \in X$ lain sedemikian sehingga $f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i(\boldsymbol{x}^*)$ untuk semua i dan $f_j(\boldsymbol{x}) < f_j(\boldsymbol{x}^*)$ untuk minimal satu j.*

Seperti halnya pada masalah pemrograman nonlinier dengan satu fungsi objektif (*single objective*), beberapa metode hanya dapat menemukan solusi optimal lokal untuk masalah pemrograman nonlinier yang bersifat nonkonveks. Jika konsep ini diterapkan pada masalah pemrograman nonlinier dengan banyak fungsi objektif, maka konsep optimalitas Pareto lokal diperkenalkan sebagai bentuk adaptasi dari optimalitas lokal.

Konsep solusi optimal Pareto lokal pertama kali diperkenalkan oleh Geoffrion (1968) [5].

Definisi 2.3. *(Sakawa, 1993) Titik $\boldsymbol{x}^*$ disebut solusi optimal Pareto lokal PNLMO jika tidak ada $\boldsymbol{x} \in X \cap N(\boldsymbol{x}^*, \delta)$ lain sedemikian sehingga $f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i(\boldsymbol{x}^*)$ untuk semua i dan $f_j(\boldsymbol{x}) < f_j(\boldsymbol{x}^*)$ untuk minimal satu j, dengan $N(\boldsymbol{x}^*, \delta)$ merupakan persekitaran dengan titik pusat $\boldsymbol{x}^*$ dan jari-jari δ yang didefinisikan dengan $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \delta\}$ dan $\boldsymbol{x}^*$ merupakan solusi optimal Pareto $X \cap N(\boldsymbol{x}^*, \delta)$ dengan δ merupakan bilangan riil positif.*

Solusi optimal Pareto masalah PNLMO dengan prioritas dapat diperoleh melalui pendekatan metode pembobotan. Bobot dari suatu fungsi objektif dipilih secara proporsional dengan prioritas fungsi objektif. Pengaturan vektor bobot yang tepat juga bergantung pada interval setiap fungsi objektif [3]. Jika terdapat k fungsi objektif, maka akan diperoleh sebanyak k interval, $[f_i^{min}, f_i^{max}], i = 1, 2, \ldots, k$, yang berbeda. Selain itu, setiap fungsi objektif dapat memiliki satuan dan tujuan optimisasi yang berbeda pula. Menggabungkan k tujuan optimisasi dan k satuan yang berbeda adalah hal yang tidak memungkinkan secara langsung. Selain itu, ketika fungsi objektif tersebut diberi bobot untuk membentuk fungsi objektif gabungan, akan lebih baik jika masing-masing fungsi objektif memiliki ukuran interval dan satuan yang kurang lebih sama, sehingga semua fungsi objektif memiliki pengaruh yang seimbang saat dievaluasi atau digabungkan. Permasalahan ini dapat diatasi dengan melakukan normalisasi fungsi objektif yaitu mengubah interval fungsi objektif menjadi $[0, 1]$.

3. **Normalisasi Fungsi Objektif**

Pada makalah ini, fungsi objektif (2.1) yang semula berada dalam interval - $[f_i^{min}, f_i^{max}], i = 1, 2, \ldots, k$ dinormalisasi sedemikian sehingga berada pada interval $[0, 1]$. Langkah-langkah normalisasi sebagai berikut:

(1) Menentukan nilai maksimum dan minimum masing-masing fungsi objektif $f_i^{\min} =$ minimum $f_i(\boldsymbol{x})$ dan $f_i^{\max} =$ maksimum $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(2) Menentukan domain awal
Dibentuk fungsi keanggotaan *fuzzy* untuk target fungsi objektif meminimalkan $f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, \ldots, k$ seperti pada GAMBAR 1, dengan $f_i^* = f_i^{min}$. Selanjutnya $[f_i^{min}, f_i^{max}], i = 1, 2, \ldots, k$ disebut sebagai domain awal.

(3) Mengubah batas bawah domain menjadi 0, dengan cara

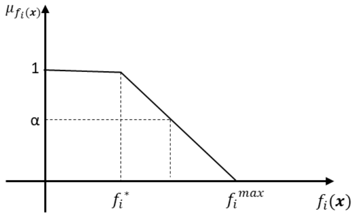
$$(f_i(\boldsymbol{x}) - f_i^{min}),$$

(4) Mengubah batas atas domain menjadi 1, dengan cara

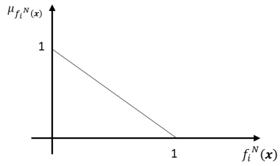
$$\frac{(f_i(\boldsymbol{x}) - f_i^{min})}{f_i^{max} - f_i^{min}} = f_i^N(\boldsymbol{x}). \tag{3.1}$$

sehingga diperoleh domain baru, $f_i^N(\boldsymbol{x}) \in [0, 1], i = 1, 2, \ldots, k$, seperti pada GAMBAR 2. Selanjutnya $f_i^N(\boldsymbol{x})$ dapat dituliskan sebagai

$$f_i^N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{h_i}(f_i(\boldsymbol{x}) - l_i), i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.2}$$



GAMBAR 1. Fungsi keanggotaan masalah meminimalkan $f_i(\boldsymbol{x})$



GAMBAR 2

dengan $h_i = f_i^{max} - f_i^{min}$ dan $l_i = f_i^{min}, i = 1, 2, \ldots, k$, yang kemudian disebut sebagai fungsi objektif yang dinormalkan.

4. Metode Pembobotan dengan Fungsi Objektif yang Dinormalkan

Jika diberikan urutan prioritas fungsi objektif seperti pada kondisi (2.3), maka bobot masing-masing fungsi objektif haruslah memenuhi kondisi

$$w_{p+1} < w_p, p = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{4.1}$$

serta memenuhi batasan bobot untuk masing-masing fungsi objektif, di mana $w_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k$ dan $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$ [6].

Masalah pembobotan untuk masalah PNLMO (2.1)-(2.2) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} &\text{meminimalkan} \quad \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\boldsymbol{x}) \\ &\text{dengan kendala} \quad \boldsymbol{x} \in X. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Solusi optimal masalah pembobotan (4.2) untuk beberapa $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k) > 0$ merupakan merupakan solusi optimal Pareto masalah PNLMO (2.1)-(2.2) dan solusi optimal Pareto masalah PNLMO (2.1)-(2.2) merupakan solusi optimal masalah pembobotan (4.2) untuk beberapa $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \geq 0$ [5].

Selanjutnya, jika semua fungsi objektif pada masalah PNLMO (2.1) dinormalkan, maka diperoleh model masalah pembobotan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\text{meminimalkan} \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i^N}{h_i} f_i(\boldsymbol{x}) \\ &\text{dengan kendala} \quad \boldsymbol{x} \in X. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Selanjutnya (4.3) disebut sebagai masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan dan (4.2) disebut sebagai masalah pembobotan biasa, dengan $w_i^N, i = 1, 2, \ldots, k$ menunjukkan bobot untuk masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan.

Baik masalah pembobotan biasa maupun masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan dapat digunakan untuk memperoleh solusi optimal masalah PNLMO dengan prioritas. Untuk masalah optimisasi dengan fungsi konveks, keduanya dapat memberikan solusi optimal yang sama untuk beberapa kombinasi bobot yang diberikan, dengan kondisi urutan prioritas pada (4.1). Jika fungsi objektif dengan prioritas berbeda diberi bobot yang sama, dengan kata lain semua fungsi objektif dipandang memiliki prioritas yang sama, solusi optimal yang diperoleh dengan metode pembobotan biasa bisa saja merupakan solusi individual salah satu fungsi objektif sedangkan metode pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan memberikan solusi optimal yang lebih seimbang untuk semua fungsi objektif. Selain itu, solusi optimal dari masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan merupakan solusi optimal Pareto masalah PNLMO, dan sebaliknya. Hal tersebut dijelaskan oleh teorema berikut.

Teorema 4.1. ***(Teorema Pembobotan I PNLMO)*** *Jika $\boldsymbol{x}^*$ solusi optimal tunggal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan untuk suatu $\boldsymbol{w} \geq 0$, maka $\boldsymbol{x}^*$ solusi optimal Pareto PNLMO.*

Bukti. Dimisalkan $\boldsymbol{x}^*$ bukan solusi optimal Pareto PNLMO. Artinya, terdapat $\boldsymbol{x} \in X$ sedemikian sehingga

$$f_q(\boldsymbol{x}) < f_q(\boldsymbol{x}^*) \quad \text{untuk beberapa } q, f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i(\boldsymbol{x}^*), i = 1, 2, \ldots, k; i \neq q,$$

Oleh karena $\frac{w_i^N}{h_i} \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k$, maka

$$\frac{w_i^N}{h_i} f_i(\boldsymbol{x}) \leq \frac{w_i^N}{h_i} f_i(\boldsymbol{x}^*), i = 1, 2, \ldots, k,$$

Dengan demikian diperoleh

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{w_i^N}{h_i} f_i(\boldsymbol{x}) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i^N}{h_i} f_i(\boldsymbol{x}^*).$$

Kontradiksi dengan fakta bahwa $\boldsymbol{x}^*$ solusi optimal tunggal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan. Pengandaian salah. Oleh karena itu, $\boldsymbol{x}^*$ solusi optimal Pareto PNLMO. □

Teorema 4.2. ***(Teorema Pembobotan II PNLMO)*** *Diasumsikan bahwa semua fungsi objektif* $f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, \ldots, k$ *dan fungsi kendala* $g_j(\boldsymbol{x}), j = 1, 2, \ldots, m$ *pada masalah PNLMO (2.1)-(2.2) merupakan fungsi konveks. Jika* $\boldsymbol{x}^*$ *solusi optimal Pareto MONLP, maka terdapat* $\boldsymbol{w} \geq 0$ *sedemikian sehingga* $\boldsymbol{x}^*$ *solusi optimal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan.*

Bukti. Dimisalkan $\boldsymbol{x}^*$ solusi optimal Pareto PNLMO (2.1)-(2.2).Selanjutnya, didefinisikan himpunan bagian U dan V di $\mathbb{R}^k$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U &= \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^k : \boldsymbol{u} > 0\}, \\ V &= \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^k : \boldsymbol{v} \leq f(\boldsymbol{x}^*) - f(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in X\}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $U \cap V = \emptyset$ dan U merupakan himpunan konveks. Oleh karena $f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, \ldots, k$ diasumsikan konveks, maka himpunan V juga konveks.

Selanjutnya, diperhatikan bahwa $\boldsymbol{u} > 0$, dengan menggunakan teorema pemisah himpunan konveks, maka terdapat vektor kolom $\boldsymbol{w}^N \geq 0 (\boldsymbol{w}^N \neq 0)$ di $\mathbb{R}^k$, dengan $w_i^N = w_i h_i, i = 1, 2, \ldots, k$. Artinya terdapat vektor kolom $\boldsymbol{w} \geq 0 (\boldsymbol{w} \neq 0)$ di $\mathbb{R}^k$, sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{v} &\leq 0, \forall \boldsymbol{v} \in V \quad \text{dan} \\ \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{u} &> 0, \forall \boldsymbol{u} \in U. \end{aligned}$$

Artinya,

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}^T (f(\boldsymbol{x}^*) - f(\boldsymbol{x})) \leq 0, \text{ untuk semua } \quad \boldsymbol{v}$$

sehingga

$$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{x}^*) - f(\boldsymbol{x}) \leq 0.$$

Dengan demikian, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$, berlaku

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}^*) &\leq f(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{w}^T f(\boldsymbol{x}^*) &\leq \boldsymbol{w}^T f(\boldsymbol{x}), \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i^N}{h_i} f_i(\boldsymbol{x}^*) &\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i^N}{h_i} f_i(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Dengan kata lain $\boldsymbol{x}^*$ merupakan solusi optimal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan. □

Sedangkan teorema berikut menjelaskan hubungan antara solusi optimal masalah pembobotan biasa dan solusi optimal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan.

Teorema 4.3. ***(Teorema Pembobotan III PNLMO)*** *Jika* $\boldsymbol{x}^*$ *solusi optimal masalah pembobotan biasa, maka terdapat* $\boldsymbol{w} \geq 0$ *sedemikiam sehingga* $\boldsymbol{x}^*$ *solusi optimal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan.*

Bukti. Dimisalkan $\boldsymbol{x}^*$ solusi optimal masalah pembobotan biasa untuk suatu $\boldsymbol{w} \geq 0$, maka berdasarkan Teorema Pembobotan I PNLMO 4.1 $\boldsymbol{x}^*$ merupakan solusi optimal Pareto masalah PNLMO. Selanjutnya, oleh karena $\boldsymbol{x}^*$ solusi optimal Pareto masalah PNLMO, maka berdasarkan Teorema Pembobotan II PNLMO 4.2 terdapat $\boldsymbol{w} \geq 0$ sedemikiam sehingga $\boldsymbol{x}^*$ merupakan solusi optimal masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan. □

Hubungan bobot pada masalah pembobotan biasa dengan bobot pada masalah pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan, dapat dinyatakan sebagai:

$$w_i^N = \frac{w_i}{h_i}, i = 1, 2, \ldots, k, \tag{4.4}$$

Jika $h_i = 1, i = 1, 2, \ldots, k$, maka

$$w_i^N = w_i, i = 1, 2, \ldots, k. \tag{4.5}$$

Jika asumsi konveksitas tidak ada, tidak semua solusi optimal Pareto dapat diperoleh dengan menyelesaikan masalah pembobotan untuk beberapa $\boldsymbol{w} \geq 0$ [5]. Selain itu, untuk masalah PNLMO dengan fungsi nonkonveks, metode pembobotan hanya dapat menemukan solusi optimal Pareto lokal. Dengan demikian diberikan alternatif lain yaitu melalui pendekatan FGP.

5. ***Fuzzy Goal Programming*** dengan Fungsi Objektif yang Dinormalkan

Jika diberikan masalah PNLMO seperti pada (2.1)-(2.2) maka dapat dibentuk fungsi keanggotaan untuk masing-masing fungsi objektifnya sebagai berikut:

(1) Menentukan nilai minimum dan maksimum masing-masing fungsi objektif $f_i^{\min}$ = minimum $f_i(\boldsymbol{x})$ dan $f_i^{\max}$ = maksimum $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
(2) Menentukan nilai target, f_i^*, untuk masing-masing fungsi objektif, di mana $f_i^{\min} \leq f_i^* \leq f_i^{\max}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
(3) Mendefinisikan fungsi keanggotaan untuk masing-masing fungsi objektif sebagai berikut:

$$\mu_{f_i}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i^* \\ \frac{f_i^{\max} - f_i(\boldsymbol{x})}{f_i^{\max} - f_i^*} & , \quad f_i^* < f_i(\boldsymbol{x}) < f_i^{\max} \\ 0 & , \quad f_i(\boldsymbol{x}) \geq f_i^{\max} \end{cases} \tag{5.1}$$

Grafik $\mu_{f_i}(\boldsymbol{x})$ diberikan pada GAMBAR 1.

Dengan demikian masalah PNLMO (2.1)-(2.2) dapat dituliskan dalam model FGP sebagai berikut:

$$\max \quad \alpha \tag{5.2}$$

dengan kendala

$$\alpha \leq \frac{f_i^{max} - f_i(\boldsymbol{x})}{f_i^{max} - f_i^*}, i = 1, 2, \ldots, k \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{x} \in X, \tag{5.4}$$

$$\alpha \in (0, 1]. \tag{5.5}$$

Selanjutnya jika diasumsikan bahwa fungsi objektif dengan prioritas yang lebih tinggi akan memiliki tingkat kepuasan yang lebih tinggi pula, maka dengan menggunakan konsep α-level set, kondisi (2.3) dapat dinyatakan sebagai [2]:

$$\mu_{f_{p+1}}(\boldsymbol{x}^*) \leq \mu_{f_p}(\boldsymbol{x}^*), p = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{5.6}$$

di mana x^* merupakan solusi optimal masalah FGP dengan prioritas. Model FGP dengan prioritas dituliskan sebagai [2]:

$$\max \quad \alpha \tag{5.7}$$

dengan kendala

$$\alpha \leq \frac{f_i^{max} - f_i(\boldsymbol{x})}{f_i^{max} - f_i^*}, i = 1, 2, \ldots, k, \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{x} \in X, \tag{5.9}$$

$$\mu_{f_{p+1}}(\boldsymbol{x}) \leq \mu_{f_p}(\boldsymbol{x}), p = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{5.10}$$

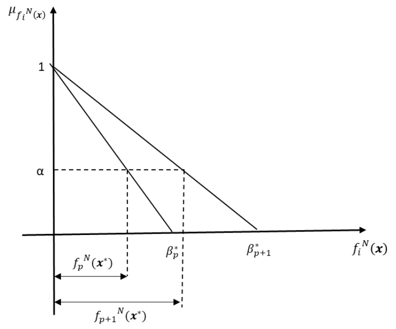
$$\alpha \in (0, 1]. \tag{5.11}$$

Penambahan kendala prioritas (5.10) mungkin saja terlalu ketat untuk penyelesaian masalah optimisasi dan mungkin tidak ada solusi yang layak ketika pengambil keputusan menginginkan derajat keanggotaan yang tinggi untuk setiap fungsi objektif di bawah persyaratan prioritas [2]. Dengan demikian Chao, dkk [2] memperkenalkan sebuah metode optimisasi domain untuk mengatasi masalah ini. Untuk model FGP dengan prioritas yang diusulkan, domain yang digunakan bukan lagi $[f_i^{min}, f_i^{max}], i = 1, 2, \ldots, k$ melainkan $[\beta_i^{min}, \beta_i^{max}]$ dengan menggunakan variabel baru β_i, di mana $\beta_i \in [0, 1], i = 1, 2, \ldots, k$ serta nilai target $f_i^* = 0, i = 1, 2, \ldots, k$. Hal ini dilakukan melalui normalisasi fungsi objektif dengan langkah-langkah seperti yang dijelaskan pada bagian sebelumnya.

Setelah dilakukan normalisasi fungsi objektif, dapat dibentuk fungsi keanggotaan linier $f_i^N(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, \ldots, k$. Grafik $\mu_{f_i^N}(\boldsymbol{x})$ diberikan pada GAMBAR 2. Jelas bahwa fungsi objektif sebelum dinormalkan dan sesudah dinormalkan memiliki derajat keanggotaan yang sama untuk $\boldsymbol{x}$ yang sama dalam domain yang sesuai. Oleh karena itu, kendala (5.8) dapat ditransformasi menjadi:

$$\beta_i - \alpha\beta_i \geq f_i^N(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, \ldots, k. \tag{5.12}$$

Domain baru $[0, 1]$, $[0, \beta_i], \beta_i \in [0, 1], i = 1, 2, \ldots, k$ dianggap sebagai kendala baru untuk fungsi objektif yang dinormalkan [2]. Fungsi objektif dengan tingkat prioritas yang lebih tinggi akan memiliki domain yang lebih kecil sehingga persyaratan prioritas seperti pada (5.6) dapat dipenuhi dalam perspektif probabilitas ketika memaksimalkan α, dan sebaliknya [2]. Fungsi objektif dengan tingkat prioritas paling rendah akan berada pada domain $[0, 1]$. Dimisalkan fungsi objektif ke-k, merupakan fungsi objektif dengan tingkat prioritas paling rendah maka $\beta_k = 1$ dan $\alpha = \mu_{f_k}(\boldsymbol{x}) = \mu_{f_k^N}(\boldsymbol{x}) = 1 - f_k^N(\boldsymbol{x})$. Dengan demikian, model FGP dengan prioritas dengan fungsi objektif yang



Gambar 3. *Domain dalam kondisi optimal*

dinormalkan didapat dituliskan sebagai [2]:

$$\text{memaksimalkan} \quad (\alpha - \lambda\gamma) \tag{5.13}$$
$$\text{dengan kendala}$$
$$0 \le f_i^N(\boldsymbol{x}) \le \beta_i - \alpha\beta_i, i = 1, 2, \ldots, k \tag{5.14}$$
$$\beta_i \in [0, 1], i = 1, 2, ..., k \tag{5.15}$$
$$\beta_p - \beta_{p+1} \le \gamma, p = 1, 2, ..., k-1, \tag{5.16}$$
$$\alpha \in (0, 1], \gamma \in [-1, 1], \tag{5.17}$$
$$\boldsymbol{x} \in X. \tag{5.18}$$

Jika diperoleh solusi optimal dengan $\gamma^* \le 0$, maka

$$\beta_p^* \le \beta_{p+1}^*, p = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{5.19}$$

Domain yang mungkin menjadi titik optimal diberikan pada GAMBAR 3. Di mana fungsi objektif $f_p^N(\boldsymbol{x}^*)$ memiliki interval yang lebih kecil dari pada $f_{p+1}^N(\boldsymbol{x}^*)$ dan lebih dekat dengan nilai target 0. Sehingga $\boldsymbol{x}^*$ akan memiliki derajat keanggotaan yang lebih tinggi pada fungsi objektif $f_p^N(\boldsymbol{x})$ dibandingkan pada fungsi objektif $f_{p+1}^N(\boldsymbol{x})$. Dengan demikian, urutan prioritas (5.6) dapat terpenuhi. Hal ini yang disebut sebagai "*domain optimization*" [2].

Dimisalkan $\theta_i = \beta_i^* - \alpha\beta_i^*, i = 1, 2, \ldots, k$, maka $\mu_{f_i}(\boldsymbol{x}) \in [1 - \theta_i, 1]$. Selanjutnya, dimisalkan $\underline{\mu}_{f_i}(\boldsymbol{x}) = \inf(\mu_{f_i}(\boldsymbol{x})) \le \mu_{f_i}(\boldsymbol{x}^*)$. Maka jelas bahwa

$$\underline{\mu}_{f_i}(\boldsymbol{x}) = 1 - (\beta_i^* - \alpha\beta_i^*) = 1 - \theta_i, i = 1, 2, \ldots, k.$$

Berdasarkan (5.19), haruslah $\theta_p \le \theta_{p+1}, p = 1, 2, \ldots, k-1$. Dengan demikian, diperoleh

$$\underline{\mu}_{f_{p+1}}(\boldsymbol{x}) \le \underline{\mu}_{f_p}(\boldsymbol{x}), p = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{5.20}$$

Syarat urutan prioritas yang digunakan bukan lagi (5.6) melainkan (5.20). Dengan demikian, batasan uturan prioritas tidak terlalu ketat.

Paramater λ menunjukkan keseimbangan antara optimisasi dan urutan prioritas fungsi objektif. Pemilihan paramater λ mengacu pada Goodrich,dkk (1998) yang mendefinisikan $\lambda = \frac{1-\alpha}{\alpha}, \alpha \in (0,1]$. Jika $\lambda \to 0$ maka $\alpha \approx 1$, artinya solusi optimal yang diperoleh dapat mendekati atau bahkan mencapai nilai target dengan sangat baik namun urutan prioritas fungsi objektif tidak dapat terpenuhi. Jika $\lambda \to \infty$ maka $\alpha \approx 0$, artinya solusi optimal yang diperoleh dapat memenuhi urutan prioritas dengan baik namun beberapa fungsi objektif akan menyimpang dari nilai target yang telah diberikan. Jika $\lambda \approx 1$ maka $\alpha \approx \frac{1}{2}$, artinya solusi optimal yang diperoleh dapat memenuhi nilai target untuk masing-masing fungsi objektif serta urutan prioritas yang diinginkan dapat terpenuhi [2].

Selanjutnya, jika $\gamma^* > 0$, maka urutan prioritas fungsi objektif yang diberikan oleh pembuat keputusan tidak dapat dipenuhi, selanjutnya pilih pamater λ yang lebih besar. Namun jika kondisi $\gamma^* \leq 0$ tidak dapat dipenuhi, maka urutan prioritas yang diberikan oleh pembuat keputusan kurang tepat [2].

Selanjutnya, model FGP yang diusulkan dapat diselesaikan dengan metode optimisasi nonlinier berkendala seperti metode *sequential quadratic programming* (SQP). Namun, model yang diperoleh merupakan masalah optimisasi nonlinier nonkonveks terutama ketika beberapa fungsi kendala pada masalah aslinya merupakan fungsi nonlinier nonkonveks. Metode SQP, yang didasarkan pada persamaan Kuhn-Tucker, hanya dapat memperoleh solusi optimal global untuk masalah optimisasi konveks, sehingga Chao, dkk [2] menyelesaikan masalah optimisasi ini menggunakan algoritma genetika, GENOCOP III. Oleh karena penggunaan algoritma tersebut telah dibahas pada paper yang diusulkan oleh Chao,dkk [2], sehingga pada makalah ini tidak dibahas mengenai algoritma tersebut.

6. Contoh Numerik

Contoh 6.1. *Diberikan masalah PNLMO sebagai berikut* [2]*:*

$$
\begin{aligned}
&\min f_1(\boldsymbol{x}) = (x_1+5)^2 + 4x_2^2 + 2(x_3-50)^2,\\
&\min f_2(\boldsymbol{x}) = 2(x_1-45)^2 + (x_2+15)^2 + 3(x_3+20)^2,\\
&\max f_3(\boldsymbol{x}) = 3(x_1+20)^2 + 5(x_2-45)^2 + (x_3+15)^2,\\
&\textit{dengan kendala}\\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 100,\\
&0 \leq x_i \leq 10, i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

dengan urutan prioritas fungsi objektif yaitu: prioritas 1 $f_3(\boldsymbol{x})$, prioritas 2 $f_1(\boldsymbol{x})$, dan prioritas 3 $f_2(\boldsymbol{x})$.

(1) *Menghitung nilai minimun dan maksimum fungsi objektif, dan melakukan normalisasi fungsi objektif*

$$
\begin{aligned}
f_1^N(\boldsymbol{x}) &= \frac{f_1(\boldsymbol{x}) - 3225}{2208.3}, f_1^N(\boldsymbol{x}) \in [0,1] \\
f_2^N(\boldsymbol{x}) &= \frac{f_2(\boldsymbol{x}) - 3875}{3127.94}, f_2^N(\boldsymbol{x}) \in [0,1] \\
f_3^N(\boldsymbol{x}) &= \frac{-f_3(\boldsymbol{x}) + 13077.94}{5527.94}, f_3^N(\boldsymbol{x}) \in [0,1].
\end{aligned}
$$

(2) *Menyelesaikan masalah PNLMO dengan prioritas melalui pendekatan metode pembobotan dengan fungsi objektif yang dinormalkan*
Dipilih bobot $w_1 = 0,3$, $w_2 = 0,2$, *dan* $w_3 = 0,5$, *sehingga diperoleh*

$$
\begin{aligned}
&\textit{meminimalkan} \quad 0,3f_1^N(\boldsymbol{x}) + 0,2f_2^N(\boldsymbol{x}) + 0,5f_3^N(\boldsymbol{x}) \\
&\textit{dengan kendala} \\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 100, \\
&0 \leq x_i \leq 10, i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan metode SQP, diperoleh solusi optimal:

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 7,708, \\
x_2^* &= 0, \\
x_3^* &= 6,3707.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dapat dipilih $\delta = 0,01$, *maka tidak ada* $\boldsymbol{x}$ *lain di dalam persekitaran* $N(\boldsymbol{x^*}, \delta)$ *yang dapat memberikan nilai fungsi objektif lebih baik atau sama baik untuk semua fungsi objektif dan lebih baik untuk minimal satu fungsi objektif. Artinya,* $\boldsymbol{x}^*$ *merupakan solusi optimal Pareto lokal masalah PNLMO yang diberikan. Selain itu, teorema pembobotan tidak dapat diterapkan pada masalah PNLMO ini.*

(3) *Menyelesaikan masalah PNLMO dengan prioritas melalui pendekatan FGP dengan prioritas dengan fungsi objektif yang dinormalkan.*
Domain baru fungsi objektif yang diusulkan adalah $[0, \beta_i], \beta_i \in [0,1], i = 1,2,3$ *dengan* $\beta_2 = 1$. *Dengan demikian diperoleh model FGP dengan prioritas dan*

fungsi objektif yang dinormalkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&\textit{memaksimalkan} \quad (\alpha - \lambda\gamma) \\
&\textit{dengan kendala} \\
&0 \leq \frac{(x_1+5)^2 + 4x_2^2 + 2(x_3-50)^2 - 3225}{2208,3} \leq (1-\alpha)\beta_1, \\
&0 \leq \frac{2(x_1-45)^2 + (x_2+15)^2 + 3(x_3+20)^2 - 3875}{3127,94} \leq (1-\alpha), \\
&0 \leq \frac{-3(x_1+20)^2 - 5(x_2-45)^2 - (x_3+15)^2 + 13077,94}{5527,94} \leq (1-\alpha)\beta_3, \\
&\beta_3 - \beta_1 \leq \gamma, \\
&\beta_1 - 1 \leq \gamma, \\
&\alpha \in (0,1], \beta_1, \beta_3 \in [0,1], \gamma \in [-1,1], \\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 100, \\
&0 \leq x_i \leq 10, i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan metode SQP diperoleh solusi optimal, seperti pada TABEL 1.

TABEL 1. Solusi optimal Contoh PNLMO dengan nilai λ yang berbeda

	λ		
	$0,5$	1	2
x_1	$6,91792836959245$	$6,91792836957730$	$6,91792836957263$
x_2	$5,55616893971148 \times 10^{-17}$	$-8,24529508456418 \times 10^{-17}$	0
x_3	$7,22096025979811$	$7,22096025979181$	$7,22096025978987$
$\mu_{f_1}(\boldsymbol{x})$	$0,7386$	$0,7386$	$0,7386$
$\mu_{f_2}(\boldsymbol{x})$	$0,5288$	$0,5288$	$0,5288$
$\mu_{f_3}(\boldsymbol{x})$	$0,9484$	$0,9484$	$0,9484$
$f_1(\boldsymbol{x})$	$3802,1391$	$3802,1391$	$3802,1391$
$f_2(\boldsymbol{x})$	$5348,4249$	$5348,4249$	*5348,4249*
$f_3(\boldsymbol{x})$	$12792,4884$	$12792,4884$	*12792,4884*

Solusi yang diperoleh memenuhi syarat optimisasi serta urutan prioritas fungsi objektif telah terpenuhi. Namun, untuk nilai λ yang berbeda solusi optimal yang diperoleh menunjukkan perbedaan yang tidak signifikan. Hal ini disebabkan oleh penggunaan metode penyelesaian yang kurang tepat, penyelesaian model FGP yang diusulkan dapat dilakukan dengan menggunakan algoritma genetika, GENOCOP III, seperti yang dibahas pada paper Chao, dkk [2].

7. PENUTUP

Pada makalah ini, masalah PNLMO dengan prioritas dan fungsi objektif yang dinormalkan diselesaikan dengan pendekatan metode pembobotan dan FGP. Solusi optimal yang diperoleh merupakan solusi optimal Pareto dari masalah yang diberikan. Namun, untuk masalah dengan fungsi yang bersifat nonkonveks, metode pembobotan hanya dapat memberikan solusi optimal Pareto lokal. Selanjutnya, model yang diusulkan dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah pengambilan keputusan yang biasanya berupa masalah optimisasi multiobjektif yang kompleks.

References

[1] Bector, C. R., Chandra, S., *Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games*, Springer, Germany, 2005.

[2] Chao, F. H., Teng, C. J., Li, S. Y., A Fuzzy Goal Programming Approach to Multiobjective Optimization Problem with Priorities, *European Juornal of Operation Research* **176** (2007), 1319-1333.

[3] Deb, K., *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*, John Wiley and Sons LTD, England, 2001.

[4] Mohamed, R. H, The Relationship between Goal Programming and Fuzzy Programming, *Fuzzy Sets and System* **89** (1997), 215-222.

[5] Sakawa, M., *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Springer Science+Business, New York, 1993.

[6] Zitzler, E., *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications*, Diss. ETH No. 13398, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 1999.

KARTIKA KUSUMA SARI* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
E-mails: kartikakusumasari@mail.ugm.ac.id

INDARSIH
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
E-mails: indarsih@ugm.ac.id