

**SOLUSI PERMASALAHAN LAPLACE PADA MATERIAL  
BERGRADASI FUNGSIONAL DENGAN METODE  
ELEMEN BATAS**

**(SOLUTION OF LAPLACE PROBLEMS ON  
FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS WITH  
BOUNDARY ELEMENT METHOD)**

SANDY SALOMO SARUAN, GUSTI AYU DWI YANTI

**Abstract.** In this paper, the Laplace equation in functionally graded materials is transformed into the Helmholtz equation in isotropic media, and the boundary element method is used to obtain the solution to the boundary value problem. Examples using trigonometric and exponential grading functions are provided to demonstrate the accuracy of the numerical solution.

*Keywords:* Laplace equation, DRBEM, boundary condition.

**Abstrak.** Pada paper ini, persamaan Laplace di material bergradasi fungsional ditransformasikan menjadi persamaan Helmholtz pada media isotropik dan digunakan metode elemen batas untuk memperoleh solusi persamaan nilai batas. Diberikan contoh dengan menggunakan fungsi gradasi trigonometri dan eksponensial untuk menunjukkan keakuratan dari solusi numerik.

*Kata-kata kunci:* persamaan Laplace, DRBEM, syarat batas.

## 1. PENDAHULUAN

Material bergradasi fungsional (FGM) anisotropik merupakan jenis media yang sifatnya berubah dalam arah yang berbeda secara sistematis dari satu permukaan material ke permukaan yang lain. Sifat pada media FGM berubah secara bertahap sepanjang dimensi material, menciptakan sistem non-homogen. Dalam konteks FGM, persamaan Laplace memegang peranan penting dalam memodelkan berbagai fenomena fisik, misalnya yang berkaitan dengan distribusi suhu dan potensial elektrostatik. Penelitian-penelitian terkait dengan aplikasi FGM dapat dilihat pada [1], [2] tentang penerapan dalam bidang *aerospace*, [3] penerapan pada bidang otomotif, dan lainnya.

Beberapa peneliti melakukan analisis untuk menyelesaikan solusi persamaan Laplace pada material isotropik homogen maupun pada FGM anisotropik. Umumnya model matematika yang dihasilkan tidak dapat diselesaikan secara analitik, terdapat berbagai metode analisis yang berhasil mencari solusi numerik dari permasalahan pada material, misalnya Metode Elemen Batas (BEM). La Nafie, dkk. [4], Haddade, dkk. [5], St N, dkk. [6] mengimplementasikan BEM dan memperoleh solusi numerik yang konvergen, konsisten dan akurat pada permasalahan eliptik dalam media non-homogen. Azis, dkk. [7] meninjau persamaan Helmholtz untuk media FGM dengan syarat batas Dirichlet dan Neumann, dengan menggunakan BEM dalam menyelesaikan permasalahan. Diperoleh solusi numerik yang akurat dan konsisten. Kemudian pada Pramesti, dkk. [8] menggunakan *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM) untuk menyelesaikan permasalahan konduksi panas pada anisotropik pelat tipis, diperoleh akurasi yang baik untuk permasalahan yang diberikan solusi analitiknya. Selanjutnya, pada [9] meninjau permasalahan konveksi-difusi-reaksi pada keadaan tunak, penyelesaian dengan menggunakan DRBEM. Pada [10] menerapkan gabungan BEM dan transformasi Laplace untuk menyelesaikan permasalahan Laplace dalam keadaan tidak tunak pada FGM anisotropik, hasil yang diperoleh bahwa solusi numerik memiliki akurasi yang baik.

Diperhatikan persamaan Laplace tidak tunak pada FGM dengan koefisien variabel spasial yang diteliti oleh Azis [11], yaitu

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \right] = \alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (1.1)$$

dengan  $(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$ . Koefisien  $[k_{ij}]$  untuk  $i, j = 1, 2$  merupakan matriks simetris real definit positif. Kemudian, Clements dan Rogers [12] meneliti persamaan Laplace tunak pada FGM

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(x_2) \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0, \quad (1.2)$$

dengan koefisien  $k_{ij}$  hanya bergantung pada  $x_2$ .

Berdasarkan hal tersebut, pada artikel ini bertujuan untuk mengimplementasikan metode DRBEM untuk menyelesaikan permasalahan persamaan Laplace tunak pada media FGM,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (1.3)$$

dengan koefisien  $k_{ij}$  bergantung pada  $x_1$  dan  $x_2$ .

Persamaan 1.3 akan ditransformasikan menjadi persamaan pada media isotropik. Kemudian persamaan pada media isotropik tersebut akan diubah menjadi persamaan koefisien konstan yang diperoleh dengan menurunkan persamaan integral batas. Setelah itu, dilakukan analisis numerik dengan menggunakan metode DRBEM.

## 2. TRANSFORMASI PERSAMAAN LAPLACE DAN MASALAH SYARAT BATAS

Pada bab ini dijelaskan model matematika permasalahan Laplace dalam keadaan tunak pada media FGM anisotropik. Misalkan pada sistem koordinat  $O_{x_1x_2}$ , persamaan Laplace media FGM dapat dimodelkan sebagai

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (2.1)$$

Dalam hal ini, permasalahannya adalah menyelesaikan Persamaan (2.1) dalam region  $R$  dimensi dua yang dibatasi oleh kurva mulus sederhana  $C$  dan syarat batas

$$\mu(\mathbf{x}), \text{ untuk } (\mathbf{x}) \in C_1, \quad (2.2)$$

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_{x_j}, \text{ untuk } (\mathbf{x}) \in C_2, \quad (2.3)$$

dengan  $C_1$  dan  $C_2$  merupakan kurva yang tidak berpotongan sehingga  $C_1 \cup C_2 = C$ , dan  $\mathbf{n} = (n_{x_1}, n_{x_2})$  adalah vektor satuan yang tegak lurus terhadap kurva  $C$  pada titik  $(\mathbf{x})$  mengarah ke luar region  $R$ .

Metode untuk menyelesaikan Persamaan (2.1) adalah dengan melakukan transformasi dari persamaan dengan koefisien variabel  $k_{ij}(\mathbf{x})$  ke persamaan dengan koefisien konstan, dalam hal ini transformasi dari media FGM anisotropik ke media anisotropik. Kemudian, persamaan pada media anisotropik ditransformasi ke media isotropik dengan menggunakan transformasi rotasi dan dilatasi. Setelah itu, dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss didapat persamaan relasi resiprokal, untuk memperoleh persamaan integral batas. Persamaan integral batas selanjutnya diselesaikan menggunakan DRBEM.

Dimisalkan

$$k_{ij}(\mathbf{x}) = \bar{k}_{ij} g(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

dengan konstan  $\bar{k}_{ij}$  dan  $g$  fungsi yang dapat diturunkan terhadap  $\mathbf{x}$ . Substitusikan Persamaan (2.4) ke Persamaan (2.1) sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bar{k}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ g(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (2.5)$$

Selanjutnya, dimisalkan

$$\mu(\mathbf{x}) = g^{-1/2}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \bar{k}_{ij} g^{1/2}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \bar{k}_{ij} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 g^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Kemudian, jika  $g(\mathbf{x})$  memenuhi

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bar{k}_{ij} \frac{\partial^2 g^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda g^{1/2}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.8)$$

dengan  $\lambda$  konstan, maka Persamaan (2.7) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bar{k}_{ij} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.9)$$

yang merupakan persamaan dengan koefisien konstan pada media anisotropik biasa.  $\bar{k}_{ij}$  adalah koefisien yang diasumsikan sebagai komponen pada matriks

$$K = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

yang memenuhi  $\bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ji}$  dan  $\bar{k}_{ii} \bar{k}_{jj} > \bar{k}_{ij}^2$  untuk  $i \neq j$ .

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (2.4) dan (2.6) ke Persamaan (2.3) sehingga diperoleh

$$P(\mathbf{x}) = -P_g(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) + g^{1/2}(\mathbf{x})P_\psi(\mathbf{x}), \quad (2.11)$$

dengan

$$P_g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bar{k}_{ij} \frac{\partial g^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_{x_j}, \quad (2.12)$$

dan

$$P_\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bar{k}_{ij} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_{x_j}. \quad (2.13)$$

Oleh karena itu, syarat batas pada media anisotropik biasa adalah

$$\psi(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}), \text{ untuk } (\mathbf{x}) \in C_1, \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bar{k}_{ij} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_{x_j} = f_2(\mathbf{x}), \text{ untuk } (\mathbf{x}) \in C_2, \quad (2.15)$$

dengan  $f_1(\mathbf{x}) = g^{1/2}(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})$  dan  $f_2(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})g^{-1/2}(\mathbf{x}) + P_g(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})g^{-1/2}(\mathbf{x})$ .

Setelah itu, persamaan dengan koefisien konstan (2.9) pada media anisotropik biasa ditransformasikan menjadi persamaan pada media isotropik. Pada Persamaan (2.10), karena matriks koefisien  $K$  simetris sehingga dapat diperoleh sistem koordinat baru yaitu  $O_{x'_1 x'_2}$ , dengan

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

untuk sudut rotasi  $\theta$ , sedemikian hingga  $K$  ditransformasikan menjadi

$$K' = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & 0 \\ 0 & \bar{k}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Menggunakan sistem koordinat  $O_{x'_1 x'_2}$ , Persamaan (2.9) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{i=1}^2 \bar{k}_i \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i'^2} - \lambda \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.18)$$

yang merupakan persamaan pada media ortotropik.

Persamaan pada media ortotropik (2.18) dapat ditransformasikan menjadi persamaan pada media isotropik menggunakan sistem koordinat baru  $O_{X_1 X_2}$ , dengan  $X_1$  dan  $X_2$  yang didefinisikan oleh

$$X_1 = x'_1 \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{k}_1}} \text{ dan } X_2 = x'_2 \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{k}_2}}, \quad (2.19)$$

dengan  $\bar{k}$  memenuhi

$$\bar{k} = \sqrt{\bar{k}_1 \bar{k}_2}. \quad (2.20)$$

Oleh karena itu, Persamaan (2.18) menjadi

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial X_2^2} - k\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.21)$$

yang merupakan tipe persamaan Helmholtz pada media isotropik, dengan  $k = \lambda/\bar{k}$ .

Dimisalkan  $(\mathbf{X}) = (X_1, X_2)$ . Menggunakan transformasi (2.16), (2.17) dan (2.19), sehingga syarat batas (2.14) dan (2.15) ditransformasikan menjadi

$$\psi = f_1 \left( \cos \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{k}} X_1 - \sin \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{k}} X_2, \sin \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{k}} X_1 + \cos \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{k}} X_2 \right), \quad (2.22)$$

untuk  $(\mathbf{X}) \in C'_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} = f_2 \left( \cos \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{k}} X_1 - \sin \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{k}} X_2, \sin \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_1}{k}} X_1 + \cos \theta \sqrt{\frac{\bar{k}_2}{k}} X_2 \right) \\ \times \left( \frac{\sqrt{\frac{\bar{k}_1}{k}} (\hat{X}_1)^2 + \frac{\bar{k}_2}{k} (\hat{X}_2)^2}{\bar{k} \sqrt{(\hat{X}_1)^2 + (\hat{X}_2)^2}} \right), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

dengan  $\hat{X}_i = X_i^{(s_2)} - X_i^{(s_1)}$ , untuk  $i = 1, 2$  dimana  $(X_1^{(s_1)}, X_1^{(s_2)})$  dan  $(X_2^{(s_1)}, X_2^{(s_2)})$  merupakan koordinat ujung-ujung elemen batas pada sistem koordinat  $O_{X_1 X_2}$ . Persamaan (2.22) dan (2.23) merupakan syarat batas persamaan Helmholtz pada media isotropik,

### 3. PERSAMAAN INTEGRAL BATAS

Pada bagian ini dijelaskan penyelesaian persamaan yang diperoleh pada sesi sebelumnya. Untuk menyelesaikan Persamaan (2.21) menggunakan DRBEM, dimisalkan  $\psi_1$  adalah solusi Persamaan (2.21) dan  $\psi_2$  adalah solusi persamaan Laplace, sehingga dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_2^2} = k\psi_1, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial X_2^2} = 0. \quad (3.2)$$

Kemudian dengan melakukan operasi-operasi matematika pada kedua Persamaan (3.1), (3.2), dan diintegrasikan kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned} & \iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial X_2} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_2} \right) \right] dX_1 dX_2 \\ &= \iint_R k \psi_1 \psi_2 dX_1 dX_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Menggunakan Teorema Divergensi Gauss [13], diperoleh

$$\int_C \left[ \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right] ds(\mathbf{X}) = \iint_R k \psi_1 \psi_2 dX_1 dX_2. \quad (3.4)$$

Selanjutnya karena  $\psi_1 = \psi(\mathbf{X})$  adalah solusi persamaan (2.21) yang hendak dicari dan  $\psi_2 = \Psi(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0)$  adalah solusi fundamental persamaan Laplace, diperoleh

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{X}_0) \psi(\mathbf{X}_0) &= \int_C \left[ \Psi(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) \frac{\partial \psi(\mathbf{X})}{\partial n} - \psi(\mathbf{X}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0)}{\partial n} \right] ds(\mathbf{X}) \\ &+ \iint_R k \Psi(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) \psi(\mathbf{X}) dX_1 dX_2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan  $\mathbf{X}_0 = (\xi, \eta)$ ,

$$\Gamma = \begin{cases} 0, & \text{jika } (\xi, \eta) \notin R' \cup C' \\ \frac{1}{2}, & \text{jika } (\xi, \eta) \in C' \\ 1, & \text{jika } (\xi, \eta) \in R', \end{cases} \quad (3.6)$$

dan

$$\Psi(\mathbf{X}; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \sqrt{(X_1 - \xi)^2 - (X_2 - \eta)^2} \right]. \quad (3.7)$$

Persamaan (3.5) diselesaikan secara numerik dengan melakukan diskretisasi batas domain menjadi  $N$  segmen yaitu  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(N)}$ , dan dipilih sebanyak  $L$  titik interior menjadi titik kolokasi interior. Kemudian dengan menggunakan titik-titik kolokasi



dan titik-titik kolokasi interior, fungsi dalam integral domain didekati dengan fungsi basis radial, sehingga pendekatan Persamaan (3.5) dapat ditulis

$$\Gamma(\mathbf{X}_0)\psi(\mathbf{X}_0) = \sum_{i=1}^N \left[ \mathcal{F}_2^{(i)}(\mathbf{X}_0)\psi^{(i)} - \mathcal{F}_1^{(i)}(\mathbf{X}_0)\psi_n^{(i)} \right] + k \sum_{j=1}^{N+L} \phi^{(\mathbf{X}_{0j})}\psi(a^{(j)}, b^{(j)}), \quad (3.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} \psi^{(i)} &= \psi(a^{(i)}, b^{(i)}), \\ \psi_n^{(i)} &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\mathbf{X}=(a^{(i)}, b^{(i)})}, \\ \mathcal{F}_1^{(i)}(\mathbf{X}_0) &= \int_{C^{(i)}} \Psi(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) ds(\mathbf{X}), \\ \mathcal{F}_2^{(i)}(\mathbf{X}_0) &= \int_{C^{(i)}} \frac{\partial}{\partial n} \Psi(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) ds(\mathbf{X}), \\ \phi^{(\mathbf{X}_{0j})} &= \sum_{m=1}^{N+L} \tau(\mathbf{X}_0; a^{(m)}, b^{(m)}) \omega^{(mj)}, \\ \tau(\mathbf{X}_0; a^{(m)}, b^{(m)}) &= \Gamma(\mathbf{X}_0) \kappa(\mathbf{X}_0; a^{(m)}, b^{(m)}) - \sum_{i=1}^N \left[ \mathcal{F}_2^{(i)}(\mathbf{X}_0) \kappa(a^{(i)}, b^{(i)}; a^{(m)}, b^{(m)}) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F}_1^{(i)}(\mathbf{X}_0) \kappa(a^{(i)}, b^{(i)}; a^{(m)}, b^{(m)}) \right], \\ \kappa(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) &= \frac{1}{4} r^2(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) + \frac{1}{16} r^4(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) + \frac{1}{25} r^5(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0), \\ r(\mathbf{X}; \mathbf{X}_0) &= \sqrt{(X_1 - \xi)^2 - (X_2 - \eta)^2}. \end{aligned}$$

Kemudian, jika titik  $(\mathbf{X}_0) = (\xi, \eta)$  disubstitusikan dengan titik kolokasi  $(a^{(n)}, b^{(n)})$  yang merupakan titik tengah segmen  $C^{(n)}$ , untuk  $n = 1, 2, \dots, N$  dan titik-titik kolokasi interior  $(a^{(n)}, b^{(n)})$ , untuk  $n = N + 1, N + 2, \dots, N + L$ , maka diperoleh suatu sistem persamaan linear, sehingga dengan menggunakan MATLAB, solusi numerik pada titik-titik kolokasi dapat diperoleh. Sebagai tambahan,  $\omega^{(mj)}$  merupakan entri dari matriks  $\mathbf{Q}^{-1}$ , dengan  $\sigma^{(nm)} = \sigma(a^{(n)}, b^{(n)}; a^{(m)}, b^{(m)}) = 1 + r^2(a^{(n)}, b^{(n)}; a^{(m)}, b^{(m)}) + r^3(a^{(n)}, b^{(n)}; a^{(m)}, b^{(m)})$  adalah entri matriks invertibel  $\mathbf{Q}$ .

Selanjutnya, karena  $g(\mathbf{x})$  memenuhi Persamaan (2.8), hal ini memungkinkan pada banyaknya pemilihan koefisien  $g(\mathbf{x})$ . Sebagai contoh, jika  $\lambda = 0$ , maka  $g(\mathbf{x})$  dapat berbentuk fungsi multiparameter

$$g(\mathbf{x}) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3)^2. \quad (3.9)$$

Untuk kasus  $\lambda \neq 0$ , beberapa kemungkinan  $g(\mathbf{x})$  adalah

$$g(\mathbf{x}) = [A \cos(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3) + B \sin(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3)]^2, \quad \bar{k}_{ij} \alpha_i \alpha_j = -\lambda, \quad (3.10)$$

$$g(\mathbf{x}) = [\exp(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3)]^2, \quad \bar{k}_{ij} \alpha_i \alpha_j = \lambda, \quad (3.11)$$

dengan  $A, B, \alpha_i$  merupakan konstan bernilai real.

#### 4. SIMULASI NUMERIK

Metode yang disajikan pada pembahasan sebelumnya diuji dengan menggunakan dua permasalahan. Masalah pertama digunakan untuk menguji keakuratan metode dan masalah kedua yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, diselesaikan dengan menggunakan simulasi numerik.

Dua permasalahan mempunyai domain yang sama seperti ilustrasikan pada gambar berikut ini.

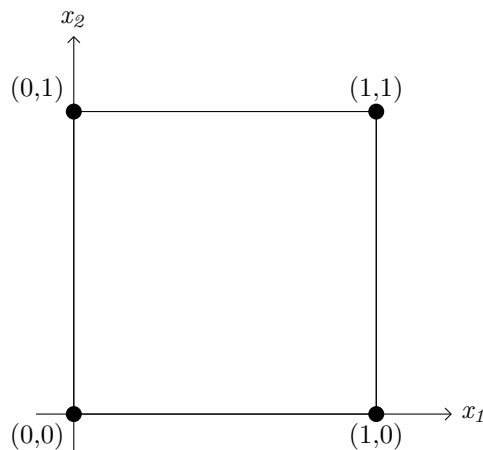


FIGURE 1. Domain dari Contoh 1 dan 2

Batas dari domain  $C$  dinotasikan sebagai  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$  dengan

$$C_1 = \{(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\}, \quad (4.1)$$

$$C_2 = \{(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}, \quad (4.2)$$

$$C_3 = \{(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 1\}, \quad (4.3)$$

$$C_4 = \{(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}. \quad (4.4)$$

4.1. **Contoh 1.** Ditinjau persegi pada daerah  $R$  diilustrasikan pada Gambar 2, dengan

$$R = \{(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}. \quad (4.5)$$

Diberikan persamaan Laplace pada media FGM berdimensi dua, yaitu

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0, \quad (4.6)$$

dengan syarat batas sebagai berikut. dengan syarat batas sebagai berikut

$$P = \frac{\sqrt{30} \left( -7 \cos \left( \frac{\sqrt{30}x_1}{30} \right) + \cos \left( \frac{7\sqrt{30}x_1}{30} \right) \right) \cos(x_1) - 4.8989795 \sin(x_1) \sin \left( \frac{2\sqrt{30}x_1}{15} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{30}x_1}{10} \right)}{\cos^2(x_1)}$$

$$\text{untuk } x_1 = 1 \text{ dan } 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (4.7)$$

$$\mu = \frac{\sin \left( \frac{\sqrt{30}(x_2+2)}{15} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{30}(1-2x_2)}{10} \right)}{\cos(0.5797959x_2 + 1)}, \text{ untuk } x_1 = 1 \text{ dan } 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (4.8)$$

$$\mu = \frac{\sin \left( \frac{\sqrt{30}(2x_1+1)}{15} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{30}(x_1-2)}{10} \right)}{\cos(x_1 + 0.5797959)}, \text{ untuk } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ dan } x_2 = 1, \quad (4.9)$$

$$\mu = \frac{\sin \left( \frac{\sqrt{30}x_2}{15} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{30}x_2}{5} \right)}{\cos(0.5797959x_2)}, \text{ untuk } x_1 = 0 \text{ dan } 0 \leq x_2 \leq 1. \quad (4.10)$$

Solusi analitik dari fungsi  $\mu$  diketahui, yaitu

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{\sin \left( \frac{\sqrt{30}(2x_1+x_2)}{15} \right) \cos \left( \frac{\sqrt{30}(x_1-2x_2)}{10} \right)}{\cos(x_1 + 0.5797959x_2)} \quad (4.11)$$

dengan

$$K = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

dan fungsi gradasi trigonometri

$$g(\mathbf{x}) = [\cos(x_1 + 0.5797959x_2)]^2. \quad (4.13)$$

Menggunakan Persamaan (2.8) dan (2.9), diperoleh

$$8 \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + 4 \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + 5 \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + 12\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.14)$$

yang merupakan persamaan dengan koefisien konstan pada media anisotropik biasa. Untuk mengimplementasikan DRBEM, Persamaan (4.14) ditransformasikan menjadi tipe persamaan Helmholtz pada media isotropik menggunakan transformasi 2.16 dan 2.19. Persamaan yang dihasilkan yaitu

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial X_2^2} + 2\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.15)$$

dengan syarat batas

$$\psi = \sin(X_1) \cos(X_2), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_1, \quad (4.16)$$

$$\psi = \sin(X_1) \cos(X_2), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_2, \quad (4.17)$$

$$\psi = \sin(X_1) \cos(X_2), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_3, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{5} \sqrt{5} \cos(X_1) \cos(X_2) + \frac{2}{5} \sqrt{5} \sin(X_1) \sin(X_2), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_4. \quad (4.19)$$

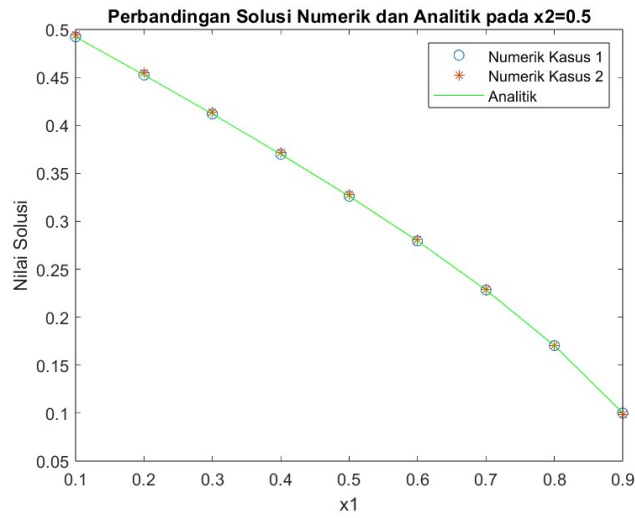
Untuk menerapkan DRBEM, kurva  $C'$  didistribusikan ke dalam dua kasus yaitu, (1) 80 titik batas ( $N$ ), dan 81 titik interior ( $M$ ), dan (2) 404 titik batas ( $N$ ), dan 361 titik interior ( $M$ ). Beberapa titik yang dipilih pada solusi numerik dibandingkan dengan solusi analitik pada titik tersebut. Hasil perbandingan ditampilkan pada Tabel 1.

TABEL 1. Perbandingan solusi numerik dan analitik pada beberapa titik.

$(x_1, x_2)$	Numerik-1	Numerik-2	Analitik	Galat-1	Galat-2
(0.1, 0.1)	0.052551	0.054684	0.055103	0.002552	0.000419
(0.5, 0.1)	-0.179164	-0.177794	-0.177478	0.001686	0.000315
(0.5, 0.5)	0.326171	0.327732	0.328003	0.001832	0.000271
(0.9, 0.5)	0.100166	0.098752	0.098309	0.001858	0.000444
(0.9, 0.9)	1.759811	1.759724	1.760260	0.000449	0.000536

Tabel 1 menunjukkan kolom Numerik-1 dan Galat-1 merupakan solusi numerik dan galat *absolute* dari kasus (1), begitu juga untuk kasus (2). Berdasarkan tabel yang disediakan, terlihat bahwa solusi numerik untuk kasus (1) dan kasus (2) dibandingkan dengan solusi analitik pada berbagai titik  $(x_1, x_2)$  menunjukkan hasil yang cukup akurat. Kedua metode numerik ini umumnya mendekati nilai analitik, menunjukkan bahwa metode numerik yang diterapkan cukup efektif.

Galat-1, yang merupakan selisih antara numerik-1 dan analitik, umumnya lebih besar dibandingkan dengan galat-2, yang merupakan selisih antara numerik-2 dan analitik, kecuali pada titik (0.9, 0.9). Hal ini menunjukkan bahwa kasus (2) memberikan hasil yang lebih dekat dengan nilai analitik daripada kasus (1). Dengan kata lain, untuk  $N$  dan  $M$  yang lebih besar membuat hasil lebih akurat karena menghasilkan galat yang lebih kecil di semua titik yang diuji. Secara keseluruhan, meskipun galat bervariasi tergantung pada nilai  $(x_1, x_2)$ , untuk kasus (2) secara konsisten lebih baik dalam mendekati solusi analitik. Ini menegaskan bahwa pendekatan numerik kedua lebih efektif dalam mencapai hasil yang lebih akurat. Kemudian terlihat pada dua kasus tersebut, ketika berada pada titik interior yang paling dekat dengan batas yang diketahui  $\mu$  yaitu pada titik (0.9, 0.9). Pada titik tersebut terlihat bahwa kedua metode numerik memberikan galat yang cukup kecil, dengan kata lain cukup akurat, mendekati nilai analitiknya. Kemudian perbandingan solusi numerik dan analitik pada titik interior sepanjang garis  $x_2 = 0.5$ , diilustrasikan pada Gambar 2.

FIGURE 2. Solusi numerik dan analitik pada  $x_2 = 0.5$ 

4.2. **Contoh 2.** Pada contoh ini fungsi gradasi yang digunakan yaitu fungsi gradasi eksponensial. Ditinjau persegi pada daerah  $R$ , dengan

$$R = \{(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}. \quad (4.20)$$

Diberikan persamaan Laplace pada media FGM dimensi dua, yaitu

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0, \quad (4.21)$$

dengan syarat batas sebagai berikut

$$\mu = \frac{\exp(2 + x_1)}{\exp(-0.45 + 0.75x_1)}, \text{ untuk } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ dan } x_2 = 0, \quad (4.22)$$

$$P = 0.01848 \exp\left(-0.2 + \frac{-124 + \sqrt{12471}}{140}x_2 + 1.2x_2\right),$$

untuk  $x_1 = 1$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ , (4.23)

$$\mu = \frac{\exp\left(x_1 + \frac{240 + \sqrt{12471}}{140}\right)}{\exp(0.15 + 0.75x_1)}, \text{ untuk } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ dan } x_2 = 1, \quad (4.24)$$

$$P = -0.01848 \exp\left(1.55 + \frac{-124 + \sqrt{12471}}{140}x_2 + 1.2x_2\right),$$

untuk  $x_1 = 0$  dan  $0 \leq x_2 \leq 1$ .

(4.25)

Solusi analitik dari fungsi  $\mu$  diketahui, yaitu

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(2 + x_1 + \frac{-40 + \sqrt{12471}}{140}x_2\right)}{\exp(-0.45 + 0.75x_1 + 0.6x_2)},$$
(4.26)

dengan

$$K = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1.75 \end{bmatrix},$$
(4.27)

dan fungsi gradasi

$$g(\mathbf{x}) = [\exp(-0.45 + 0.75x_1 + 0.6x_2)]^2.$$
(4.28)

Menggunakan Persamaan (2.8) dan (2.9), diperoleh

$$0.25 \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + 1.75 \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} - 1.220625 \psi(\mathbf{x}) = 0,$$
(4.29)

yang merupakan persamaan dengan koefisien konstan pada media anisotropik biasa.

Untuk mengimplementasikan DRBEM, Persamaan (4.29) ditransformasikan menjadi tipe persamaan Helmholtz pada media isotropik menggunakan transformasi 2.16 dan 2.19. Persamaan yang dihasilkan yaitu

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial X_2^2} - 2.81891 \psi(\mathbf{x}) = 0,$$
(4.30)

dengan syarat batas

$$\psi = \exp(2 + 2.09549 \cos \theta X_1 - 0.477216 \sin \theta X_2), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_1,$$
(4.31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} = & 0.50597 \exp \left( 3 + \frac{-40 + \sqrt{12471}}{140} (2.09549 \sin \theta X_1 - 0.477216 \cos \theta X_2) \right) \\ & \times \left( \frac{\sqrt{\frac{\bar{k}_1}{k} (\hat{X}_1)^2 + \frac{\bar{k}_2}{k} (\hat{X}_2)^2}}{\bar{k} \sqrt{(\hat{X}_1)^2 + (\hat{X}_2)^2}} \right), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\psi = \exp \left( \frac{240 + \sqrt{12471}}{140} + 2.09549 \cos \theta X_1 - 0.477216 \sin \theta X_2 \right), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_3, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} = & -0.50597 \exp \left( 2 + \frac{-40 + \sqrt{12471}}{140} (2.09549 \sin \theta X_1 - 0.477216 \cos \theta X_2) \right) \\ & \times \left( \frac{\sqrt{\frac{\bar{k}_1}{k} (\hat{X}_1)^2 + \frac{\bar{k}_2}{k} (\hat{X}_2)^2}}{\bar{k} \sqrt{(\hat{X}_1)^2 + (\hat{X}_2)^2}} \right), \text{ untuk } (\mathbf{X}) \in C'_4. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Seperti pada Contoh 1, kurva  $C'$  didistribusikan ke dalam dua kasus yaitu, (1) 80 titik batas ( $N$ ), dan 81 titik interior ( $M$ ), dan (2) 404 titik batas ( $N$ ), dan 361 titik interior ( $M$ ). Beberapa titik yang dipilih pada solusi numerik dibandingkan dengan solusi analitik pada titik tersebut. Hasil perbandingan ditampilkan pada Tabel 2.

TABEL 2. Perbandingan solusi numerik dan analitik pada beberapa titik.

$(x_1, x_2)$	Numerik-1	Numerik-2	Analitik	Galat-1	Galat-2
(0.1, 0.1)	12.117811	11.832202	11.777483	0.340328	0.054719
(0.5, 0.1)	13.259722	13.044097	13.015697	0.244025	0.028400
(0.5, 0.5)	12.558250	12.565554	12.565408	0.007158	0.000145
(0.9, 0.5)	13.955927	13.893559	13.886459	0.069468	0.007100
(0.9, 0.9)	13.294786	13.393136	13.406046	0.111259	0.012910

Berdasarkan tabel 2, dapat diperoleh bahwa solusi numerik kasus (1) dan kasus (2) dibandingkan dengan solusi analitik pada beberapa titik  $(x_1, x_2)$  menunjukkan hasil yang cukup akurat. Nilai dari kedua metode numerik ini cenderung mendekati nilai analitik, yang menandakan bahwa metode numerik yang digunakan efektif.

Galat-1, yang merupakan perbedaan antara numerik-1 dan analitik, umumnya lebih besar dibandingkan dengan galat-2, yang merupakan perbedaan antara numerik-2



dan analitik. Hal ini menunjukkan bahwa kasus (2) memberikan hasil yang lebih dekat dengan nilai analitik daripada kasus (1). Dengan kata lain, untuk  $N$  dan  $M$  yang lebih besar membuat hasil lebih akurat karena menghasilkan galat yang lebih kecil di semua titik yang diuji. Secara keseluruhan, meskipun galat bervariasi tergantung pada nilai  $(x_1, x_2)$ , untuk kasus (2) secara konsisten lebih baik dalam mendekati solusi analitik. Ini menegaskan bahwa pendekatan numerik kedua lebih efektif dalam mencapai hasil yang lebih akurat. Kemudian terlihat pada dua kasus tersebut, ketika titik berada pada titik paling jauh dari kurva, yaitu pada titik  $(0.5, 0.5)$  memberikan hasil yang cukup akurat dengan galat 0.007158 dan 0.000145 berturut-turut untuk kasus (1) dan (2). Kemudian perbandingan solusi numerik dan analitik pada titik interior sepanjang garis  $x_2 = 0.5$ , diilustrasikan pada Gambar 3.

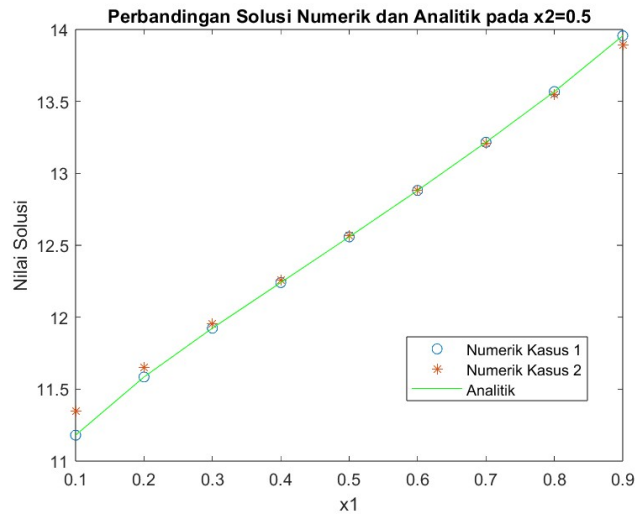


FIGURE 3. Solusi numerik dan analitik pada  $x_2 = 0.5$

## 5. PENUTUP

Permasalahan persamaan Laplace tunak pada media FGM diselesaikan secara numerik menggunakan metode DRBEM. Untuk menyelesaikan masalah dengan menggunakan metode DRBEM, dilakukan serangkaian transformasi seperti transformasi koordinat dan transformasi Laplace yang mengubah persamaan Laplace pada media FGM

menjadi tipe persamaan Helmholtz pada media isotropik. DRBEM diuji dengan permasalahan yang menggunakan fungsi gradasi eksponensial dan trigonometri dengan solusi analitik yang diketahui untuk memeriksa keakuratannya. Hasil numerik menunjukkan metode yang digunakan sesuai untuk menyelesaikan kedua permasalahan tersebut.

**Ucapan terima kasih\***. Tuliskan ucapan terima kasih disini (jika diperlukan).

### References

- [1] Kumar, S., Reddy, K.M., Kumar, A. and Devi, G.R., Development and characterization of polymer-ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace application, *Aerospace Science and Technology*, **26(1)** (2013), 185-191.
- [2] Zhao, P., Wang, S., Guo, S., Chen, Y., Ling, Y., Li, J., Bonding W and W – Cu composite with an amorphous W – Fe coated copper foil through hot pressing method, *Materials & Design*, **42** (2012), 21-24.
- [3] Udupa, G. and Gangadharan, K.V., Future applications of carbon nanotube reinforced functionally graded composite materials, *IEEE-international conference on advances in engineering, science and management (ICAESM-2012)*, (2012), 399-404.
- [4] La Nafie, N., Ilyas, N., Azis, M. I., & Amir, A. K., A class of variable coefficient elliptic equations solved using BEM, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, **619(1)** (2019), 012025.
- [5] Haddade, A., Azis, M. I., Djafar, Z., St N, J., & Nurwahyu, B. , Numerical solutions to a class of scalar elliptic BVPs for anisotropic quadratically graded media, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, **279(1)** (2019), 012007.
- [6] St N, J., Azis, M. I., Djafar, Z., & Nurwahyu, B., BEM solutions to a class of elliptic BVPs for anisotropic trigonometrically graded media, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, **619(1)** (2019), 012059.
- [7] Azis, M. I., Solekudin, I., Aswad, M. H., & Jalil, A. R., Numerical simulation of two-dimensional modified Helmholtz problems for anisotropic functionally graded materials, *Journal of King Saud University-Science* **32(3)** (2020), 2096-2102.
- [8] Pramesti, A. N., Solekudin, I., & Azis, M. I., Implementation of dual reciprocity boundary element method for heat conduction problems in anisotropic solid, *AENG International Journal of Applied Mathematics*, **(1)52** (2022), 1-9.

- [9] Al-Bayati, S. A., & Wrobel, L. C., The dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion-reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions, *International Journal of Mechanical Sciences*, **145** (2018), 367-377.
- [10] Azis, M. I., Solekudin, I., Aswad, M. H., Hamzah, S., & Jalil, A. R., A combined Laplace transform and boundary element method for unsteady Laplace problems of several classes of anisotropic functionally graded materials, *Engineering Letters* **29(2)** (2021), 534-542.
- [11] Azis, M. I., A combined laplace transform and boundary element method for a class of unsteady laplace type problems of anisotropic exponentially graded materials, *Engineering Letters* **29(3)** (2021), 894-900.
- [12] Clements, D.L., and Rogers, C., Wave Propagation in Inhomogeneous Elastic Media with (n+1)-Dimensional Spherical Symmetry, *Canadian Journal of Physics*, **52(14)** (1974), 1246-1252.
- [13] Solekudin, I., *Pengantar Metode Elemen Batas*, Penerbit Lintang Pustaka Utama, Yogyakarta, 2020.

SANDY SALOMO SARUAN: Universitas Gadjah Mada.

E-mails: sandysaruan27@gmail.com

GUSTI AYU DWI YANTI: Universitas Gadjah Mada.

E-mails: gustiayu9d@gmail.com