RANCANGAN PERCOBAAN FAKTORIAL LENGKAP UNTUK MENDUGA PERMUKAAN RESPONS KWADRATIK DENGAN CONTOH 3^3 FAKTORIAL

(THE DESIGN OF COMPLETE FACTORIAL EXPERIMENTS TO EXPLORE RESPONSE SURFACES WITH AN EXAMPLE FOR 3^3 FACTORIAL)

oleh

Djoko Prajitno *)

SUMMARY

Experimenters in agriculture, often use a design of complete factorials for carrying out various experiments. If all the factors are representing quantitative variables like time, temperature, and amount of fertilizers, it is natural to think of the yield or response Y as a function of the levels of these variables. We may write :

$$Y_u = f(X_{1u}, X_{2u}, \ldots\ldots X_{iu}) + E$$

where u = 1, 2, ... n represents the n observations in the factorial experiment and X_{iu} represents the level of the i th factor in the u th observation. The function f is called the *response surface*. For agricultural experiments it is appropriate to explore response surfaces up to quadratic.

In order to obtain a quadratic response surface, it is necessary to take at least three different levels for each variable. The levels of each variable must be choosen so that the response perform "the law of deminishing return".

The first step in calculating the regression coefficients is to change the levels of each variable by coding each X scale, for example: -1, 0, +1 for the lowest, moderate and highest doses, respectively. The regression coefficient b is obtained from the matrix equation :

$$b = (X'X)^{-1} X'Y$$

and the standard error of each regression coefficient is found by the relation

$$s_b = \sqrt{c_{ii}\, s^2}$$

where $c = (X'X)^{-1}$

*) Laboratorium Statistik Pertanian, Departemen Agronomi, Fakultas Pertanian, Universitas Gadjah Mada.

The optimum and maximum values of X are found by differentiating Y with respect to each X in turn.

RINGKASAN

Dalam bidang pertanian rancangan faktorial lengkap banyak digunakan untuk melakukan berbagai macam percobaan. Bila semua faktor yang diujikan merupakan variabel-variabel yang dapat dinyatakan secara kwantitatip, seperti waktu, temperature, dosis pupuk dan sebagainya, maka produksi atau respons Y akan merupakan fungsi dari variabel-variabel tersebut, yang hubungannya dapat kita tuliskan sebagai :

$$Y_u = (X_{1u}, X_{2u}, \ldots\ldots X_{iu}) + E$$

dimana u = 1, 2, ... n merupakan banyaknya n pengamatan yang dilakukan dalam percobaan faktorial tersebut, dan X_{iu} adalah level ke i dalam pengamatan ke u. Fungsi f ini biasanya disebut sebagai "permukaan respons". Untuk percobaan-percobaan dibidang pertanian kita cukup menduga persamaan permukaan respons sampai tingkat kwadratnya saja.

Bagi rancangan faktorial lengkap, untuk mendapatkan persamaan permukaan respons kwadratik, sedikit-dikitnya diperlukan tiga level dari masing-masing faktor yang dipilih sedemikian rupa sehingga persamaan tersebut akan menampakkan hukum "the law of deminishing return".

Langkah pertama dalam menghitung koefisien regressi ialah dengan merubah masing-masing level ke dalam bentuk sandi, misalnya : -1, 0 dan +1 masing-masing untuk dosis rendah, dosis sedang dan dosis tinggi. Koeffisien regresi b didapatkan dari persamaan matrix :

$$b = (X'X)^{-1} X'Y$$

sedang standard error masing-masing koefisien regressi didapat dari hubungan :

$$s_b = \sqrt{c_{ii}\ s^2}$$

dimana $c = (X'X)^{-1}$

Nilai optimum dan maksimum diperoleh dengan mencari turunan pertama Y terhadap X.

PENGANTAR

Dalam bidang pertanian, rancangan faktorial lengkap banyak digunakan untuk melakukan berbagai macam percobaan termasuk percobaan pemupukan. Dengan menggunakan analisa variance kita dapat melihat pengaruh masing-masing faktor maupun interaksinya terhadap obyek yang kita selidiki.

Didalam percobaan-percobaan pemupukan biasanya seorang peneliti ingin mengetahui pula respons suatu obyek terhadap kombinasi perlakuan pupuk yang diberikan padanya, yang sering disebut sebagai kurve respons. Kurve respons pemupukan ialah kurve hubungan antara kenaikan produksi yang diperoleh, dengan penambahan sarana produksi yaitu pupuk (7). Umumnya kenaikan produksi yang diperoleh karena penambahan pupuk secara berturutan akan selalu mengikuti hukum "the law of deminishing return", dan bentuk fungsi yang sering digunakan untuk mengadakan pendekatan ialah fungsi kwadrat

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_{11}X_1^2 \qquad (1.1)$$

Oleh karena itu untuk percobaan-percobaan pemupukan, biasanya kita cukup menduga sampai tingkat kwadratnya saja (4). Dengan pertolongan kurve respons ini, dapat ditentukan dosis optimum untuk tiap-tiap perlakuan (pupuk) secara terpisah.

Pada pemberian lebih dari dua macam pupuk, kurve respons ini menjadi tidak tepat lagi karena adanya interaksi antara pupuk-pupuk tersebut, yang akan berpengaruh terhadap dosis optimum maupun maksimum dari masing-masing pupuk. Untuk itu digunakan persamaan permukaan respons.

Dibawah ini akan diuraikan cara mencari persamaan permukaan respons kwadratik untuk rancangan faktorial lengkap secara umum. Sebagai ilustrasi diambil rancangan 3^3 faktorial. Data yang digunakan adalah data percobaan pendugaan dosis optimum N, P_2O_5 dan K_2O pada tanah alluvial dan regosol, pada padi gogo, dari Lembaga Penelitian Padi Tanah Kering Fakultas Pertanian Universitas Gadjah Mada dalam kerjasamanya dengan Direktorat Teknik Pertanian, Departemen Pertanian, Disini hanya diambil data dari percobaan yang dilakukan di Palur (Surakarta), pada M.P. 1972/1973 (2).

II RANCANGAN FAKTORIAL LENGKAP UNTUK MENDUGA PERMUKAAN RESPONS KWADRATIK

Untuk mendapatkan persamaan permukaan respons kwadratik, maka sedikit-dikitnya diperlukan 3 level dari masing-masing faktor yang dipilih sedemikian rupa sehingga persamaan tersebut akan menampakkan hubungan "law of deminishing return". Akibatnya untuk p faktor harus kita gunakan rancangan 3^p faktorial lengkap.

Bentuk umum dari persamaan permukaan respons kwadratik dapat digambarkan dengan suatu contoh untuk 2 faktor :

$$Y_i = B_o + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + B_{11}X_{1i}^2 + B_{22}X_{2i}^2 + B_{12}X_{1i}X_{2i} + E_i \qquad (2.1.)$$

dimana pengaruh linear digambarkan oleh X_{1i} dan X_{2i} ; kwadratik oleh X_{1i}^2 dan X_{21}^2 dan interaksi dua faktor oleh $X_{1i}X_{2i}$ (3).

Apabila terdapat n kombinasi perlakuan dalam percobaan tersebut maka i akan berjalan dari 1 s/d n, sehingga didapat hubungan-hubungan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= B_o + B_1X_{11} + B_2X_{21} + B_{11}X_{11}^2 + B_{22}X_{21}^2 + B_{12}X_{11}X_{21} + E_1 \\
Y_2 &= B_o + B_1X_{12} + B_2X_{22} + B_{11}X_{12}^2 + B_{22}X_{22}^2 + B_{12}X_{12}X_{22} + E_2 \\
&\;\;\vdots \\
Y_n &= B_o + B_1X_{1n} + B_2X_{2n} + B_{11}X_{1n}^2 + B_{22}X_{2n}^2 + B_{12}X_{1n}X_{2n} + E_n
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Yang dalam bentuk matrix dapat ditulis sebagai berikut :

$$Y = X\,B + E \tag{2.3}$$

dimana

$$
Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}
\qquad
X = \begin{bmatrix}
1 & X_{11} & X_{21} & X_{11}^2 & X_{21}^2 & X_{11}X_{21} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{1n}^2 & X_{2n}^2 & X_{1n}X_{2n}
\end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_{11} \\ B_{22} \\ B_{12} \end{bmatrix}
\qquad
E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n \end{bmatrix}
$$

Untuk menduga nilai B, digunakan methode least square. Methode least square ialah suatu methode untuk memperkirakan parameter B, yaitu mencari b sedemikian rupa sehingga jumlah kwadrat dari seluruh error menjadi minimum (6). Jadi :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \text{minimum}$$

dimana e merupakan penduga dari E. Jadi dengan demikian kita peroleh persamaan : (2.4)

$$Y = X\,b + e \text{ atau } e = Y - X\,b$$

Maka jumlah kwadrat dari seluruh error adalah : (2.5)

$$\sum_{i=1}^{n} (e_i)^2 = (e_i)'(e_i) = (Y - X\,b)'(Y - X\,b)$$

$$= Y'Y - b'X'Y - Y'Xb + b'X'Xb$$

dimana tanda ...' menunjukkan transpose dari matrix yang bersangkutan. Karena b'X'Y merupakan "scalar" maka akan sama dengan transposenya yaitu Y'Xb. Sehingga persamaan diatas berubah menjadi :

$$(e_i)'(e_i) = Y'Y - 2Y'Xb + b'X'Xb \qquad (2.6)$$

Untuk mencari b sedemikian rupa sehingga jumlah kwadrat seluruh error minimum, persamaan (2.6) diatas harus diturunkan dan disamakan terhadap nol. Jadi :

$$\frac{d\,(e_i)'(e_i)}{db} = -\,2\,Y'X + 2\,X'Xb = 0 \qquad (2.7)$$

Kita ketahui pula bahwa Y'X = X'Y, sehingga :

$$-\,2\,X'Y + 2\,X'Xb = 0$$

$$X'Xb = X'Y$$

$$b = (X'X)^{-1}\,X'Y \qquad (2.8)$$

Standard error dari masing-masing nilai b kita dapatkan dari hubungan seperti tersebut dibawah (5) :

$$s_b = \sqrt{c_{ii}\,s^2} \qquad (2.9)$$

dimana : $c = (X'X)^{-1}$

s^2 = variance error.

Fungsi respons dari p faktor, mempunyai daerah pemetaan berdimensi p. Untuk memudahkan cara penggambaran maupun perhitungannya, maka masing-masing level dari setiap faktor perlu diubah kedalam bentuk sandi. Karena masing-masing faktor memerlukan 3 level, maka sandinya dapat sebagai berikut : -1 untuk level rendah
0 untuk level sedang
+1 untuk level tinggi

Dengan demikian bentuk persamaan permukaan respons yang diperoleh dengan memasukkan nilai-nilai b, masih dalam satuan sandi. Untuk mengubah kebentuk aslinya, digunakan rumus (2.10) dibawah ini (1) :

$$X = \frac{\text{dosis} - (\text{dosis maksimum} + \text{dosis minimum}) \;/\; \text{range sandi}}{(\text{dosis maksimum} - \text{dosis minimum}) \;/\; \text{range sandi.}} \qquad (2.10)$$

Dalam percobaan pemupukan, peneliti sering kali ingin menduga dosis optímum dan maksimum dari masing-masing jenis pupuk. Dosis optimum dapat didefinisikan sebagai suatu dosis yang memberikan keuntungan yang maksimum (7). Dengan penambahan pupuk dari X ke X + Δ X, diharapkan akan memberikan kenaikan hasil dari Y ke Y + Δ Y. Misalkan ongkos kenaikan biaya pemupukan tersebut = $q\Delta X$, dimana q adalah harga per unit pupuk, dan nilai penambahan hasil yang disebabkan oleh kenaikan dosis pupuk adalah $p\Delta Y$, dimana p adalah harga per unit hasil; maka pada tingkat optimum, nilai dari penambahan hasil yang didapat dari penambahan pupuk akan mengimbangai biaya pemupukan. Dengan kata lain pada tingkat optimum terdapat hubungan :

$$p\Delta Y = q\Delta X \qquad (2.11)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{q}{p}$$

Hal ini menuju kerumus

$$\frac{dY}{dX} = \frac{q}{p} \qquad (2.12)$$

Dosis maksimum dicapai pada penambahan ΔX, ΔY tidak bertambah atau dapat dirumuskan sebagai :

$$\frac{dY}{dX} = 0 \qquad (2.13)$$

III. 3^3 FAKTORIAL UNTUK MENDUGA PERMUKAAN RESPONS KWADRATIK

Dimisalkan kita ingin mengetahui pengaruh pupuk N, P dan K terhadap produksi padi varietas tertentu, perlu kita pilih tiga level untuk tiap macam pupuk, yaitu : N_o , N_1 , N_2 untuk pupuk N, P_o , P_1 , P_2, untuk pupuk P dan K_o , K_1 , K_2 , K_2 untuk pupuk K, sedemikian rupa sehingga dapat diperkirakan responsnya akan menampakkan hukum "the law of deminishing return". Ke 27 kombinasi perlakuan yang kita dapatkan dapat kita susun sebagai berikut :

Perlakuan	*Produksi*
N_o P_o K_o	Y_1
N_1 P_o K_o	Y_2
N_2 P_o K_o	Y_3
N_o P_1 K_o	Y_4
. . .	.
. . .	.
N_2 P_2 K_2	Y_{27}

Karena dalam percobaan ini kita uji pengaruh tiga macam faktor (pupuk), yang berarti kita memiliki 3 perubah bebas, sehingga untuk tiga perubah bebas, persamaan (1.1) akan berubah menjadi :

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2 + b_{33}X_3^2 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 \quad (3.1)$$

Tiap-tiap kombinasi perlakuan diatas akan memenuhi persamaan (3.1) diatas, sehingga diperoleh 27 persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
Y_1 &= b_o+b_1N_o+b_2P_o+b_3K_o+b_{11}N_o^2+b_{22}P_o^2+b_{33}K_o^2+b_{12}N_oP_o+b_{13}N_oK_o+b_{23}P_oK_o \\
Y_2 &= b_o+b_1N_1+b_2P_o+b_3K_o+b_{11}N_1^2+b_{22}P_o^2+b_{33}K_o^2+b_{12}N_1P_o+b_{13}N_1K_o+b_{23}P_oK_o \\
&\;\;\vdots \\
Y_{27} &= b_o+b_1N_2+b_2P_2+b_3K_2+b_{11}N_2^2+b_{22}P_2^2+b_{33}K_2^2+b_{12}N_2P_2+b_{13}N_2K_2+b_{23}P_2K_2
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Yang dalam bentuk matrix dapat kita tuliskan sebagai :

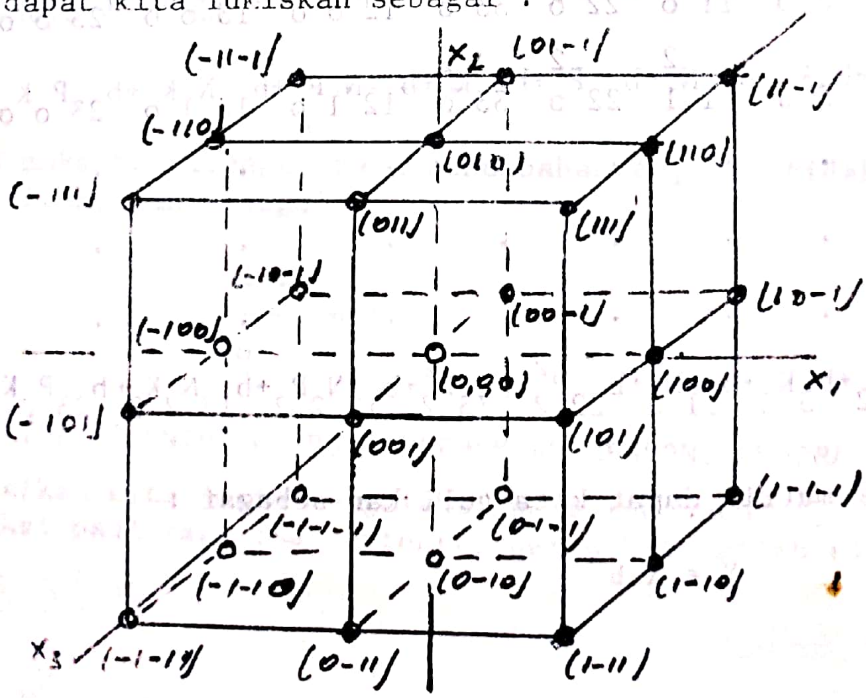
$$Y = X\,b \quad (3.3)$$

dimana :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{27} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} & N_o & P_o & K_o & N_o^2 & P_o^2 & K_o^2 & N_oP_o & N_oK_o & P_oK_o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & N_2 & P_2 & K_2 & N_2^2 & P_2^2 & K_2^2 & N_2P_2 & N_2K_2 & P_2K_2 \end{bmatrix}$$

Untuk memudahkan perhitungan, langkah pertama yang harus dijalankan ialah merubah dosis pupuk kedalam bentuk sandi yaitu : -1 untuk dosis rendah, 0 untuk dosis sedang dan +1 untuk dosis tinggi. Sehingga dalam bentuk sandi ke 27 kombinasi perlakuan tersebut diatas secara geometris dapat kita lukiskan sebagai :



Kesepuluh koefisien regressi (b_o, b_1, b_3, b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{12}, b_{13}, b_{23}) dapat ditentukan dengan urutan pengolahan matrix sebagai berikut:

$$
X = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} X_o & X_1 & X_2 & X_3 & X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 & X_{12} & X_{13} & X_{23} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$X' = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

sehingga :

$$X'X = \begin{bmatrix}
27 & 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 18 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
18 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 \\
18 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 12 & 0 & 0 & 0 \\
18 & 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12
\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan adjoint kita dapatkan inverse $X'X$ yaitu $(X'X)^{-1}$ yang besarnya :

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix}
7/27 & 0 & 0 & 0 & -1/9 & -1/9 & -1/9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/9 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12
\end{bmatrix}$$

Dengan penggandaan nilai Y_i (i = 1...... 27) dalam bentuk vektor kolom Y yang besarnya :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_{27} \end{bmatrix}$$

terhadap transpose matrix X, akan diperoleh vektor kolom X'Y yang besar-nya :

$$
X'Y = \begin{bmatrix}
(Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_{27}) \\
(Y_3+Y_6+Y_9+Y_{12}+Y_{15}+Y_{18}+Y_{21}+Y_{24}+Y_{27}) - (Y_1 + Y_4 + Y_7 + Y_{10}+Y_{13}+Y_{16}+Y_{19}+Y_{22}+Y_{25}) \\
(Y_7+Y_8+Y_9+Y_{16}+Y_{17}+Y_{18}+Y_{25}+Y_{26}+Y_{27}) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{10}+Y_{11}+Y_{12}+Y_{19}+Y_{20}+Y_{21}) \\
(Y_{19}+Y_{20}+Y_{21}+Y_{22}+Y_{23}+Y_{24}+Y_{25}+Y_{26}+Y_{27}) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9) \\
(Y_1 + Y_3 + Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_9 + Y_{10}+Y_{12}+Y_{13}+Y_{15}+Y_{16}+Y_{18}+Y_{19} + Y_{21}+Y_{22}+Y_{24}+Y_{25}+Y_{27}) \\
(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10}+Y_{11}+Y_{12}+Y_{16}+Y_{17}+Y_{18}+Y_{19} +Y_{23}+Y_{24}+Y_{25}+Y_{26}+Y_{27}) \\
(Y_1 + Y_9 + Y_{10}+Y_{18}+Y_{19}+Y_{27}) - (Y_3+Y_7+Y_{12}+Y_{16}+Y_{21}+Y_{25}) \\
(Y_1 + Y_4 + Y_7 + Y_{20}+Y_{24}+Y_{27}) - (Y_3+Y_6+Y_9+Y_{19}+Y_{22}+Y_{25}) \\
(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{25}+Y_{26}+Y_{27}) - (Y_7+Y_8+Y_9+Y_{19}+Y_{20}+Y_{21})
\end{bmatrix}
$$

Yang secara sederhana dapat kita tuliskan :

$$
X'Y = \begin{bmatrix} 0Y \\ 1Y \\ 2Y \\ 3Y \\ 11Y \\ 22Y \\ 33Y \\ 12Y \\ 13Y \\ 23Y \end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan persamaan (2.8) dapat diperoleh koefisien-koefisien regressi yang diinginkan, yang besarnya adalah sebagai berikut :

$$b_o = 7/27(0Y) - 1/9(11Y) - 1/9(22Y) - 1/9(33Y)$$

$$b_1 = 1/18\ (1Y)$$

$$b_2 = 1/18\ (2Y)$$

$$b_3 = 1/18\ (3Y)$$

$$b_{11} = - 1/9(OY) + 1/6\ (11Y)$$
$$b_{22} = - 1/9\ (OY) + 1/6\ (22Y)$$
$$b_{33} = - 1/9\ (OY) + 1/6\ (33Y)$$
$$b_{12} = 1/12\ (12Y)$$
$$b_{13} = 1/12\ (13Y)$$
$$b_{23} = 1/12\ (23Y)$$

yang secara umum dapat dirumuskan sebagai :

$$\begin{aligned} b_o &= 7/27\ (OY) - 1/9\ (iiY) \\ b_i &= 1/18\ (iY) \\ b_{ii} &= - 1/9\ (OY) + 1/6\ (iiY) \\ b_{ij} &= =1/12\ (ijY) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Untuk menduga standard error dari masing-masing koefisien regressi b yaitu s_b , digunakan rumus (2.9) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} s_{b_o} &= 0{,}5092\ s \qquad & s_{b_{ii}} &= 0{,}4082\ s \\ sb_i &= 0{,}2357\ s \qquad & s_{b_{ij}} &= 0{,}2887 \end{aligned} \tag{3.5}$$

dimana s merupakan standard error dari rancangan ini.

Pengujian koefisien regressi dilakukan dengan t test. t hitung diperoleh dari membagi koefisien regressi (b) dengan masing-masing standard errornya (s_b). Semua nilai t hitung dibandingkan dengan nilai t tabel untuk tingkat nyáta α persen, df error.

IV. PENGGUNAAN RANCANGAN.

Sebagai contoh digunakan hasil percobaan pendugaan dosis optimum N, P_2O_5 dan K_2O pada padi gogo pada tanah alluvial dan regosol, yang dilakukan oleh Lembaga Penelitian Padi Tanah Kering Fakultas Pertanian Universitas Gadjah Mada dalam kerjasamanya dengan Direktorat Teknik Pertanian, Departemen Pertanian pada musim tanam 1972/1973. Data pada tabel 1 merupakan hasil percobaan yang dilakukan pada tanah alluvial di kebun percobaan Palur (Surakarta). Rancangan yang digunakan 3^3 faktorial lengkap dalam rancangan lingkungan acak berblok dengan 3 blok. Tabel 2, menunjukkan cara analisa sampai didapatkan persamaan permukaan responsnya.

V. PEMBAHASAN DAN KESIMPULAN

Suatu keuntungan dari penggunaan rancangan faktorial lengkap sebagai rancangan perlakuan, ialah didapatkannya lebih banyak keterangan yang secara statistis dapat dipertanggung jawabkan, dibandingkan bila kita hanya menggunakan rancangan lingkungannya saja. Hal ini disebabkan karena dapat dilihatnya pengaruh masing-masing faktor maupun interaksinya. Disamping itu dengan pengolahan matrix dapat juga diduga persamaan permukaan respons-nya, yang akan makin menambah keterangan yang didapatkan oleh peneliti.

Keberatan yang timbul dalam penggunaan rancangan ini untuk menduga permukaan respons ialah sangat banyaknya kombinasi perlakuan yang perlu diujikan, yang akan menyebabkan percobaan akan memakan biaya yang cukup besar.

UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

- Ir. Soemartono yang telah banyak memberikan saran-sarannya kepada penulis, dan
- Sdr. Nsrullah B.Sc. atas koreksi-koreksinya.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anonim (1971). Laporan pengolahan data pengujian pemupukan padi sawah, sisa MP 1970/1971 dan MK 1971. Bagian Biometrika, Institut Pertanian Bogor. 25p.

2. ______ (1973). Laporan percobaan pendugaan dosis optimum N, P_2O_5 dan K_2O padi gogo pada tanah alluvial dan regosol. Kerja sama antara Lembaga Penelitian Padi Tanah Kering Fakultas Pertanian Universitas Gadjah Mada dengan Direktorat Teknik Pertanian. 11p.

3. Cochran, W.G., and G.M. Cox (1962). Experimental Designs, (2nd ed.). John Willey and Sons Inc., New York. 611 p.

4. Nasoetion, A.H., (1971). Rancangan heksagon untuk pendugaan permukaan respons kwadratik. Bull., Biometrika Bogor, 1. 10 p.

5. Steel, R.G.D., and J.H. Torrie, (1960). Principles and procedures of statistics, with special reference to the biological sciences. Mc. Graw-Hill Book Comp., Inc., New York. 481 p.

6. Supranto, (1972). Pengantar Matrix. Jajasan Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. 181 p.

7. Sutjihno, (1970). Kurva respons dan permukaan respons untuk data pemupukan. Lembaga Pusat Penelitian Pertanian, Bogor, Indonesia. 13 p.

Tabel 1. Data produksi padi gogo varietas Gama 87 yang ditanam pada tanah alluvial, pada bermacam-macam dosis pemupukan, dalam Kw/Ha gabah kering bersih.

Perlakuan pupuk kw/ha.			Ulangan			Total	Rata-rata (Y)
N	P	K	I	II	III		
1. 0	0	0	5,72	9,17	3,73	18,62	6,20
2. 1,5	0	0	15,42	7,47	17,83	40,72	13,57
3. 3	0	0	11,02	7,96	25,25	44,23	14,74
4. 0	0,75	0	5,79	5,62	5,35	16,76	5,58
5. 1,5	0,75	0	28,80	11,49	19,04	59,33	19,77
6. 3	0,75	0	27,43	28,80	21,40	77,63	25,87
7. 0	1,5	0	7,39	5,35	8,36	21,20	7,03
8. 1,5	1,5	0	21,54	12,87	19,61	54,12	18,04
9. 3	1,5	0	12,42	28,31	29,96	70,69	23,56
10. 0	0	1	2,80	31,31	4,06	38,17	12,72
11. 1,5	0	1	21,69	16,60	27,89	66,14	22,03
12. 3	0	1	33,46	10,37	22,37	66,20	22,06
13. 0	0,75	1	6,75	5,86	1,69	14,30	4,76
14. 1,5	0,75	1	20,53	10,23	25,44	56,20	18,73
15. 3	0,75	1	22,85	22,15	26,43	71,43	23,81
16. 0	1,5	1	3,24	7,36	8,15	18,75	6,25
17. 1,5	1,5	1	12,67	20,12	25,13	57,92	19,30
18. 3	1,5	1	32,50	25,45	31,89	89,84	29,94
19. 0	0	2	2,15	1,78	3,80	7,73	2,57
20. 1,5	0	2	17,04	8,22	13,34	38,60	12,53
21. 3	0	2	19,24	9,46	18,89	48,59	16,19
22. 0	0,75	2	2,08	5,16	5,59	12,83	4,27
23. 1,5	0,75	2	9,38	16,89	17,72	43,99	14,66
24. 3	0,75	2	20,58	25,85	31,12	77,55	25,83
25. 0	1,5	2	2,37	2,76	3,01	8,14	2,71
26. 1,5	1,5	2	20,53	19,35	14,55	54,43	18,14
27. 3	1,5	2	23,76	24,91	27,73	76,40	24,80

Tabel 2. Analisa data pada tabel 1.

Perlakuan Kw/Ha pupuk N	P	K	Y	Matrix X_o	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	YX_o	YX_1	YX_2	YX_3	YX_1^2	YX_2^2	YX_3^2	YX_1X_2	YX_1X_3	YX_2X_3
0	0	0	6,20	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	6,20	-6,20	-6,20	-6,20	6,20	6,20	6,20	6,20	6,20	6,20
1,5	0	0	13,57	1	0	-1	-1	0	1	1	0	0	1	13,57	0	-13,57	-13,57	0	13,57	13,57	0	0	13,57
3	0	0	14,74	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	14,74	14,74	-14,74	-14,74	14,74	14,74	14,74	-14,74	-14,74	14,74
0	0,75	0	5,58	1	-1	0	-1	1	0	1	0	1	0	5,58	-5,58	0	-5,58	5,58	0	5,58	0	5,58	0
1,5	0,75	0	19,77	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	19,77	0	0	-19,77	0	0	19,77	0	0	0
3	0,75	0	25,87	1	1	0	-1	1	0	1	0	-1	0	25,87	25,87	0	-25,87	25,87	0	25,87	0	-25,87	0
0	1,5	0	7,03	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	7,03	-7,03	7,03	-7,03	7,03	7,03	7,03	-7,03	7,03	-7,03
1,5	1,5	0	18,04	1	0	1	-1	0	1	1	0	0	-1	18,04	0	18,04	-18,04	0	18,04	18,04	0	0	-18,04
3	1,5	0	23,56	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	23,56	23,56	23,56	-23,56	23,56	23,56	23,56	23,56	-23,56	-23,56
0	0	1	12,72	1	-1	-1	0	1	1	0	1	0	0	12,72	-12,72	-12,72	0	12,72	12,72	0	12,72	0	0
1,5	0	1	22,03	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	22,03	0	-22,03	0	0	22,03	0	0	0	0
3	0	1	22,06	1	1	-1	0	1	1	0	-1	0	0	22,06	22,06	-22,06	0	22,06	22,06	0	-22,06	0	0
0	0,75	1	4,76	1	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	4,76	-4,76	0	0	4,76	0	0	0	0	0
1,5	0,75	1	18,73	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18,73	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,75	1	23,81	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	23,81	23,81	0	0	23,81	0	0	0	0	0
0	1,5	1	6,25	1	-1	1	0	1	1	0	-1	0	0	6,25	-6,25	6,25	0	6,25	6,25	0	-6,25	0	0
1,5	1,5	1	19,30	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	19,30	0	19,30	0	0	19,30	0	0	0	0
3	1,5	1	29,94	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	29,94	29,94	29,94	0	29,94	29,94	0	29,94	0	0
0	0	2	2,57	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	2,57	-2,57	-2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	2,57	-2,57	-2,57
1,5	0	2	12,53	1	0	-1	1	0	1	1	0	0	-1	12,53	0	-12,57	12,53	0	12,53	12,53	0	0	-12,53
3	0	2	16,19	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	16,19	16,19	-16,19	16,19	16,19	16,19	16,91	-16,19	16,19	-16,19
0	0,75	2	4,27	1	-1	0	1	1	0	1	0	-1	0	4,27	-4,27	0	4,27	4,27	0	4,27	0	-4,27	0
1,5	0,75	2	14,66	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	14,66	0	0	14,66	0	0	14,66	0	0	0
3	0,75	2	25,83	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	25,83	25,83	0	25,83	25,83	0	25,83	0	25,83	0
0	1,5	2	2,71	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	2,71	-2,71	2,71	2,71	2,71	2,71	2,71	-2,71	-2,71	2,71
1,5	1,5	2	18,14	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	18,14	0	18,14	18,14	0	18,14	18,14	0	0	18,14
3,0	1,5	2	24,80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80	24,80
Total														415,66 (0Y)	154,71 (1Y)	27,16 (2Y)	-12,66 (3Y)	258,89 (11Y)	272,38 (22Y)	256,06 (33Y)	30,81 (12Y)	11,91 (13Y)	0,24 (23Y)

b_o = 7/27(0Y) - 1/9(11Y) - 1/9(22Y) - (33Y) = 20,29

b_1 = 1/18(1Y) = 8,59

b_2 = 1/18(2Y) = 1,51

b_3 = 1/18(3Y) = -0,70

b_{11} = -1/9(0Y) + 1/6(11Y) = -3,03

b_{22} = -1/9(0Y) + 1/6(22Y) = -0,78

b_{33} = -1/9(0Y) + 1/6(33Y) = -3,50

b_{12} = 1/12(12Y) = 2,57

b_{13} = 1/12(13Y) = 0,99

b_{23} = 1/12(23Y) = 0,02

s_{b0} = 0,5092, s = 3,06

s_{bi} = 0,2357. s = 1,42

s_{bii} = 0,4082. s = 2,46

s_{bij} = 0,2887. s = 1,74

Persamaan respons surface :

$$Y = 20{,}29^{**} + 8{,}59X_1^{**} + 1{,}51X_2 - 0{,}70X_3 - 3{,}03X_1^2 - 0{,}78X_2^2 - 3{,}50X_3^2 + 2{,}57X_1X_2 + 0{,}99X_1X_3 + 0{,}22X_2X_3$$

Keterangan :

** = ada beda nyata pada tingkat nyata 1%