

ARTIKEL RISET

Metode Komputasi Sederhana untuk Menentukan *Saddle Point* Sistem Bumi-Bulan-Matahari dengan Akurat

Yosephine Novita Apriati, Fendinugroho, Caecarico Imas Wasisto Nugroho, Primadana Barus, Rika Indah Lestari, Ahmad Zubair Al Kahfi and Sholihun*

Received: Nov 30, 2020 | Accepted: Feb 2, 2021 | Published: Sept 17, 2021 | DOI: 10.22146/jfi.v25i1.61782

Ringkasan

Saddle point pada sistem tata surya adalah koordinat dimana total percepatan gravitasi setimbang. Beberapa penelitian terkait *saddle point* antara Bumi dan Matahari telah dilakukan akan tetapi metode yang digunakan cukup kompleks dan membutuhkan *resource* komputasi besar. Pada penelitian ini dilakukan perhitungan *saddle point* untuk sistem banyak benda (Bumi-Matahari-Bulan) menggunakan metode sederhana namun memberikan hasil yang cukup akurat. Sistem Bumi-Matahari-Bulan didesain dalam bentuk masalah pencarian akar persamaan nonlinier. Metode yang dimaksud adalah Newton – Raphson dan Secant satu dan dua dimensi. Komputasi perhitungan *saddle point* dilakukan menggunakan *Octave* dan diperoleh nilai *saddle-point* sebesar 258.769,292 km dari Bumi.

Kata Kunci : *Saddle point*, gravitasi, Newton – Raphson, *Secant* .

Abstract

Saddle points (SP) are locations where the total gravitational accelerations are balance. The calculations of the saddle point were conducted in the previous studies, however the used method was complex and needed high computational resources. In this work, the saddle point of many-body systems (Earth-Sun-Moon) were calculated using a simple method with accurate results. The Earth-Sun-Moon systems were designed in the form of the nonlinear root-finding. The involved numerical methods were one and two dimensional Newton – Raphson and Secant. The computation was carried out using an *Octave* code, and it was found that the saddle point is located at 258,769.292 km from the Earth.

Keywords: Saddle point; gravity; Newton – Raphson; Secant.

1 PENDAHULUAN

Penelitian terkait penerbangan antariksa baik berupa satelit atau penjelajahan ruang angkasa semakin berkembang. Tujuan dari penelitian tersebut diantaranya adalah untuk efisiensi bahan bakar [1], perkiraan resiko kegagalan mesin [2], dan observasi ruang untuk peluncuran yang lebih luas [3]. Diantara parameter yang dikaji adalah *Saddle Point* (SP) yaitu lokasi dimana percepatan gravitasi setimbang.

Pada tahun 2006, Jacob Bakenstein dan Joao Magueijo melakukan penelitian untuk memperkirakan koordinat SP pada tata surya dengan menyelesaikan persamaan Lagrange dari *Modified Newtonian Dynamics* (MOND). Hasilnya ditemukan bahwa koordinat SP antara Bumi dengan Matahari berjarak 258.800 km dari Bumi. Trenkel dan Kemble di tahun 2009 melakukan penelitian yang menunjukkan berbagai koordinat SP antara Bumi dan Matahari sebagai lintasan Lissajous yang berada pada jarak sekitar 259.000 km dari Bumi [4]. Lintasan ini dikemukakan sebagai salah satu lintasan yang dapat dilalui oleh *Laser Interferometer Space Antenna* (LISA) *Pathfinder* sebagai bagian dari misi yang dipersiapkan oleh *European Space Agency* (ESA).

*Correspondence: sholihun@ugm.ac.id

Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia

Full list of author information is available at the end of the article

† Equal contributor

Penelitian dikembangkan kembali oleh Fabacher, Kemble, Trenkel, dan Dunbar pada tahun 2013 yang disajikan dengan kemajuan desain lintasan yang memungkinkan lebih dari satu *flyby saddle point* [5]. Pada tahun 2018, Topputo, Rasotto, dan Nakamiya melakukan penelitian terkait SP dengan menggunakan berbagai metode pendekatan yakni : *Circular Restricted Three-Body Problem* (CRTBP), *Bicircular Restricted Four-Body Problem* (BRFBP), dan *Roto-pulsating Restricted n-body Problem*. Hasil koordinat SP yang ditemukan secara berturut – turut adalah 258.813,23 km dari Bumi, berkisar antara 3600 – 4000 km dari metode CRTBP, dan dalam range 6000 km dari metode CRTBP. Seperti metode MOND, metode yang digunakan dalam penelitian di tahun 2009, 2013, dan 2018 ini membutuhkan penyelesaian persamaan yang rumit dan membutuhkan *resource* komputasi besar dengan spesifikasi tinggi.

Dalam penelitian ini dilakukan perhitungan untuk menemukan koordinat SP antara Bumi dan Matahari serta beberapa posisi Bulan. Sistem didesain sedemikian sehingga dapat diselesaikan menggunakan metode Newton-Raphson (NR) dan Secant satu dan dua dimensi. Komputasi dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman Octave.

2 METODE PENELITIAN

Koordinat SP pada benda - benda langit akan dihitung dengan menggunakan persamaan potensial gravitasi yang secara umum dinyatakan dalam persamaan 1.

$$V(x, y) = G \left[\frac{m_1}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}} + \dots + \frac{m_n}{\sqrt{(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2}} \right] \quad (1)$$

dengan G adalah tetapan gravitasi umum, m_n adalah massa benda langit, (a_n, b_n) adalah koordinat masing masing m_n , dan (x, y) adalah koordinat pada ruang dua dimensi di angkasa. Titik kritis dari persamaan nonlinear dapat diperoleh apabila turunan dari persamaan tersebut bernilai nol atau memenuhi $dV/dx = 0$ dan $dV/dy = 0$. Untuk memastikan bahwa koordinat (x_0, y_0) adalah SP maka perlu dibuktikan dengan nilai determinan yang memenuhi kriteria berikut [6] :

- 1 Jika $D(x_0, y_0) > 0$ dan $\left(\frac{dV^2(x_0, y_0)}{d^2x}\right) > 0$ maka (x_0, y_0) adalah lokal minimum

- 2 Jika $D(x_0, y_0) > 0$ dan $\left(\frac{dV^2(x_0, y_0)}{d^2x}\right) < 0$ maka (x_0, y_0) adalah lokal minimum

- 3 Jika $D(x_0, y_0) < 0$ maka (x_0, y_0) adalah *Saddle Point*

- 4 Jika $D(x_0, y_0) = 0$ maka (x_0, y_0) tidak terdefinisi
Beberapa keadaan yang akan dianalisis merupakan keadaan khusus yang dapat dinotasikan ke dalam koordinat dua dimensi yaitu: SP Bumi – Matahari, SP Bumi – Bulan – Matahari pada keadaan Gerhana Bulan, Gerhana Matahari, dan *First Quarter Moon*. Dalam penentuan koordinat SP diperlukan beberapa parameter yang ditunjukkan pada Tabel 1. Koordinat SP dihitung dengan menyelesaikan persamaan nonlinear $dV/dx = 0$ dan $dV/dy = 0$ menggunakan metode NR dan Secant. Nilai toleransi pada proses komputasi yang dilakukan adalah 1.0×10^{-12} .

Program dibuat dengan skala massa dalam satu massa Bumi dan parameter jarak dalam orde 10^9 meter dengan Bumi sebagai acuan $(0,0)$. Software yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Octave* yang sering dipakai dalam pemrograman numerik [7]. Pada *script* program *Octave*, nilai G tidak diperhitungkan karena persamaan hasil turunan dari potensial $V(x, y)$ mengandung nilai G dikalikan dengan suatu fungsi $f(x, y)$ yang hasilnya sama dengan nol. Karena G tidak mungkin nol maka persamaan yang digunakan adalah persamaan $f(x, y) = 0$.

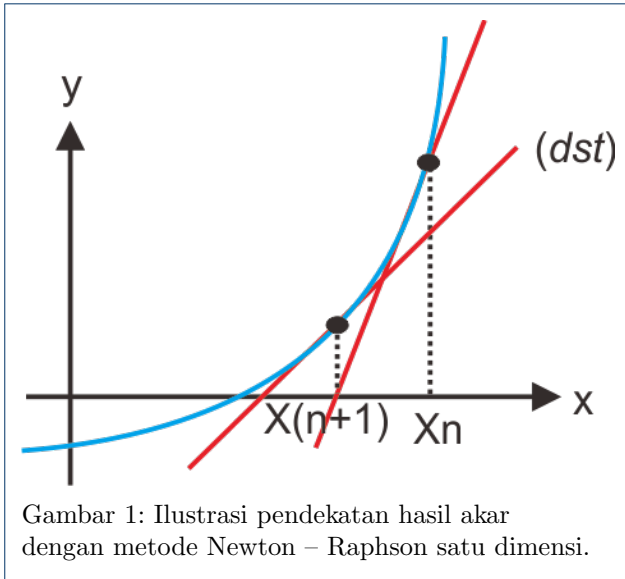
2.0.1 Newton-Raphson satu dimensi

NR merupakan salah satu metode numerik yang cukup akurat dan dapat digunakan untuk mengetahui nilai minimum suatu fungsi [8]. Penyelesaian persamaan nonlinear satu dimensi menggunakan metode NR dilakukan dengan memberikan satu nilai tebakan awal yang kemudian didekati dengan memperhitungkan *slope* atau gradien pada titik tersebut. Ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 1. Apabila terdapat suatu persamaan nonlinear $f(x)$, penyelesaian persamaan $f(x)$ dengan metode NR ditunjukkan oleh persamaan 2 [9].

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2)$$

2.0.2 Secant satu dimensi

Metode Secant satu dimensi merupakan penyelesaian persamaan nonlinier dengan cara melakukan diskritisasi terhadap turunan persamaan fungsi. Metode Secant membutuhkan dua tebakan awal untuk mendekati hasil akar. Ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 2. Suatu persamaan nonlinear $f(x)$



dibutuhkan matriks Jacobian sebagai operator diferensial. Bentuk umum dari Newton-Raphson dimensi yang lebih tinggi dinyatakan pada persamaan 4.

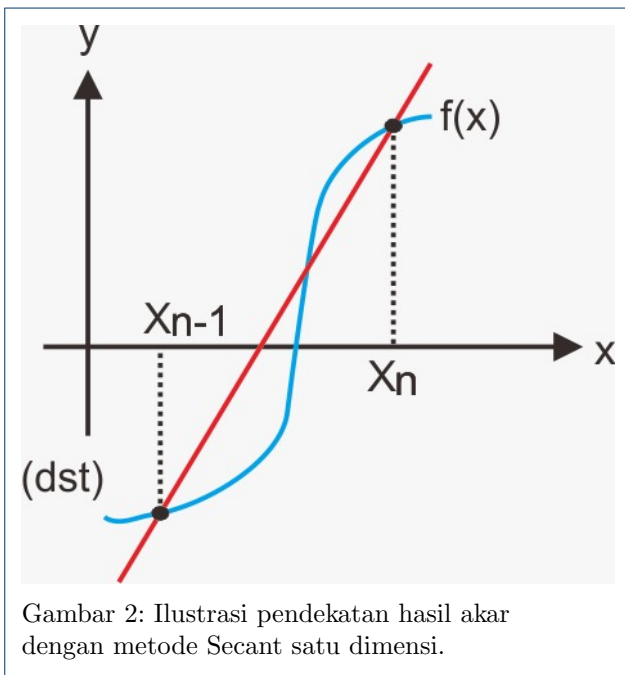
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) + J(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \Delta P \tag{4}$$

Apabila persamaan 4 dinyatakan dalam bentuk matriks maka akan diperoleh persamaan 5.

dapat diselesaikan dengan metode Secant sesuai dengan persamaan 3. [6]

$$x_{(n+1)} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{(n-1)}}{f(x_n) - f(x_{(n-1)})} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \\ \dots \\ f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \tag{5}$$



Nilai akar diperoleh apabila grafik berpotongan dengan sumbu x dan y sehingga matriks yang berada pada ruas kiri bernilai nol dan diperoleh persamaan 6.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \\ \dots \\ f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

2.0.3 Newton-Raphson dua dimensi

Metode NR dua dimensi dikembangkan dari metode NR satu dimensi. Pada metode dua dimensi

Menggunakan penyelesaian matriks pada persamaan 7 dan 8 maka persamaan hasil NR untuk dimensi yang lebih tinggi dinyatakan pada persamaan 9.

$$- \begin{bmatrix} f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \\ \dots \\ f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \\ \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_n} \\ \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{f(x_{n-1}+\delta, y_{n-1})-f(x_{n-1}, y_{n-1})}{\delta} \\ \frac{g(x_{n-1}+\delta, y_{n-1})-g(x_{n-1}, y_{n-1})}{\delta} \\ \dots \\ \frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}+\delta)-f(x_{n-1}, y_{n-1})}{\delta} \\ \frac{g(x_{n-1}, y_{n-1}+\delta)-g(x_{n-1}, y_{n-1})}{\delta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \dots \\ x_{0n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\partial x_n} \\ f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \\ \dots \\ f_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (8)$$

$$P = P_0 - J^{-1}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \quad (9)$$

dengan J adalah matriks Jacobian. Untuk sistem dua dimensi persamaan NR yang digunakan dinyatakan dalam persamaan 10.

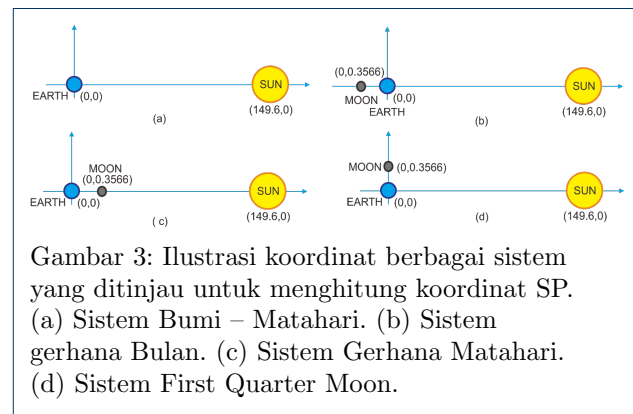
$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_{n-1}, y_{n-1})}{\partial x} & \frac{\partial f(x_{n-1}, y_{n-1})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_{n-1}, y_{n-1})}{\partial x} & \frac{\partial g(x_{n-1}, y_{n-1})}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.0.4 Secant dua dimensi

Metode Secant dua dimensi dikembangkan dari metode Secant satu dimensi dengan beberapa penyesuaian. Penyesuaian yang dimaksud adalah nilai δ (*delta*) sebagai koefisien modifikasi tebakan. Penyelesaian dengan metode Secant dua dimensi untuk dua buah persamaan nonlinear $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ dinyatakan pada persamaan 11.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Telah dilakukan perhitungan koordinat SP untuk 4 buah sistem pada Tabel 2 dengan memperhitungkan parameter pada Tabel 1. Persamaan potensial gravitasi untuk sistem Bumi – Matahari, Bumi – Bulan – Matahari pada keadaan Gerhana Bulan dan Gerhana Matahari diselesaikan dengan metode NR dan Secant satu dimensi sedangkan sistem *First Quarter Moon* diselesaikan dengan NR dan Secant dua dimensi sehingga diperoleh nilai SP untuk keempat sistem. Ilustrasi koordinat sistem dapat dilihat pada Gambar 3. Hasil yang diperoleh disajikan pada Tabel 2.



Pada saat sistem yang diperhitungkan hanya Bumi dan Matahari koordinat SP hasil perhitungan berada pada jarak 258.769,292 km dari Bumi. Sedangkan untuk sistem dengan penambahan analisis Bulan pada saat gerhana matahari memberikan nilai jarak SP dari Bumi adalah 249.905,051 km. Nilai jarak ini cenderung lebih kecil dibandingkan jarak pada sistem SP Bumi – Matahari. Hal ini terjadi karena Bulan berada diantara Bumi dan Matahari sehingga terjadi pergeseran total percepatan gravitasi yang menyebabkan bergesernya posisi SP. Untuk sistem saat terjadi gerhana bulan dan *first quarter moon* ditemukan nilai jarak SP dari Bumi secara berturut – turut adalah 259.050,454 km dan 259.092,569 km. Nilai ini cenderung lebih besar dari

Tabel 1: Nilai tetapan (parameter) untuk berbagai besaran yang digunakan dalam menghitung koordinat SP (<https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/our-solar-system/overview/>)

No	Besaran	Nilai Tetapan
1	Massa Bumi (m_1)	$1 M_{\oplus} = (5,9722 \pm 0,0006) \times 10^{24}$ kg
2	Massa Matahari (m_2)	$333.060 M_{\oplus} = (1,98847 \pm 0,00007) \times 10^{30}$ kg
3	Massa Bulan (m_3)	$0,01230315 M_{\oplus} = (7,3477 \text{kg}) \times 10^{22}$ kg
4	Jarak Bumi – Matahari	$1,496 \times 10^{11}$ m
5	Jarak Bumi – Bulan	$0,356638 \times 10^9$ m

Tabel 2: Nilai hasil perhitungan saddle point untuk berbagai sistem koordinat (orde dalam 10^9 m) pada Gambar 2

No	Sistem	Metode NR dan Secant		Jumlah Iterasi	
		Koordinat SP	Jarak SP dari Bumi (r)	Metode NR	Metode Secant
1	Bumi dan Matahari	$x_{sp} = 0,258769292$ $y_{sp} = 0,00$	0,258769292	9	9
2	Gerhana Matahari	$x_{sp} = 0,249905051$ $y_{sp} = 0,00$	0,249905051	8	8
3	Gerhana Bulan	$x_{sp} = 0,259050454$ $y_{sp} = 0,00$	0,259050454	9	8
4	First Quarter Moon	$x_{sp} = 0,25909136$ $y_{sp} = 0,000892512$	0,259092569	9	14

jarak pada saat sistem hanya Bumi dan Matahari. Hal ini dikarenakan terdapat Bulan yang berada pada titik yang lebih jauh dari Matahari sehingga menyebabkan jarak antara Matahari dan Bumi-Bulan lebih besar yang mengakibatkan pergeseran nilai SP menjadi lebih besar.

Pada Tabel 2 dapat dilihat bahwa nilai SP dihitung menggunakan dua metode berbeda dan memberikan hasil yang sama. Nilai yang diperoleh dari hasil perhitungan dengan metode NR dan Secant pada penelitian ini sesuai dengan *range* nilai dari hasil penelitian sebelumnya [10] yang menggunakan tiga buah metode pendekatan yang berbeda. Hasil pada penelitian tersebut menyatakan bahwa titik SP Bumi – Matahari metode CRTBP berada pada jarak 258.813,23 km dari Bumi dengan range orbit SP 3600-6000 km dari titik SP-CRTBP. Jarak koordinat SP pada saat sistem Bumi – Matahari, gerhana matahari, dan *first quarter moon* juga memberikan nilai yang bersesuaian dengan penelitian yang telah dilakukan oleh Bakenstein, Magueijo pada tahun 2006 dan Trenkel, Kemble pada tahun 2013 bahwa titik SP berada pada jarak 258.800 km dan 259.000 km dari Bumi.

4 KESIMPULAN

Dalam penelitian ini telah dilakukan perhitungan koordinat SP dengan mendesain sistem fisis sedemikian rupa sehingga dapat diselesaikan menggunakan metode penyelesaian akar nonlinear NR dan Secant. Nilai jarak koordinat SP terhadap Bumi pada beberapa sistem yang dihitung dalam penelitian

ini memiliki kesesuaian dengan penelitian – penelitian sebelumnya. Nilai jarak koordinat SP antara Bumi dan Matahari pada penelitian ini adalah 258.769,292 km dari Bumi.

AUTHOR

1 Yosephine Novita Apriati

From :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

2 Fendinugroho

Dari :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

3 Caecarico Imas Wasisto Nugroho

Dari :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

4 Primadana Barus

Dari :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

5 Rika Indah Lestari

Dari :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

6 Ahmad Zubair Al Kahfi

Dari :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

7 Sholihun

Dari :

(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

Pustaka

1. Belbruno EA, Miller JK. Sun-perturbed Earth-to-Moon transfers with ballistic capture. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1993;16(4):770–775.
2. Jehn R, Campagnola S, Garcia D, Kemble S. Low-thrust approach and gravitational capture at Mercury. In: 18th International Symposium on Space Flight Dynamics. vol. 548; 2004. p. 487.
3. Topputo F, Belbruno E. Earth–Mars transfers with ballistic capture. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2015;121(4):329–346.
4. Trenkel C, Kemble S. Gravitational science with LISA Pathfinder. In: *Journal of Physics: Conference Series*. vol. 154. IOP Publishing; 2009. p. 12002.
5. Fabacher E, Kemble S, Trenkel C, Dunbar N. Multiple Sun–Earth saddle point flybys for LISA Pathfinder. *Advances in Space Research*. 2013;52(1):105–116.
6. Cooper J. *A MATLAB Companion for Multivariable Calculus*. Academic Press; 2001.
7. Rogel-Salazar J. *Essential MATLAB and octave*. CRC Press; 2014.
8. Mungkala C, Bunpatcharachoen P, Janwised J. Solve one-dimensional optimization problems using Newton-Raphson Method. *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Applications*. 2017;8(2):109–120.
9. Ryaben'kii VS, Tsynkov SV. *A theoretical introduction to numerical analysis*. Chapman and Hall/CRC; 2006.
10. Topputo F, Dei Tos DA, Rasotto M, Nakamiya M. The Sun–Earth saddle point: characterization and opportunities to test general relativity. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018;130(4):1–20.