

ARTIKEL RISET

# Dinamika Model Spin XY 2 Dimensi

Mega Chistivina\* dan Rinto Anugraha

## Abstrak

Simulasi model spin XY 2 dimensi telah berhasil dilakukan menggunakan metode Monte Carlo dalam bahasa pemrograman C. Dalam simulasi ini, selain diperoleh gambaran tentang perilaku spin dalam suhu tertentu secara visual, diperoleh pula hasil kuantitatif berupa nilai besaran-besaran energi Hamiltonian, kapasitas panas khusus, magnetisasi, suseptibilitas magnetik dan kuantitas vortex yang terbentuk dalam sistem dengan suhu dibawah dan diatas suhu kritis. Lebih lanjut, diperoleh suhu kritis yang berbeda untuk kedua ukuran sistem yang diuji, yaitu  $T_c$  sebesar 1.1 untuk sistem dengan ukuran  $16 \times 16$  dan  $T_c$  sebesar 1.0 untuk ukuran  $256 \times 26$ , membuktikan bahwa suhu kritis dalam sistem ukuran terbatas akan mengalami pergeseran. Nilai  $T_c$  yang diperoleh dari kedua sistem berukuran terbatas ini cukup mendekati nilai suhu kritis ideal pada transisi Kosterlitz-Thouless yaitu  $T_{KT} = 0.892$ .

**kata kunci:** model spin; 2D XY; simulasi Monte Carlo; transisi Kosterlitz-Thouless

## Abstract

A simulation of two-dimensional XY spin model has been done using Monte Carlo methods written in C. In this simulation, the behaviour of spins on a certain temperature had been visually learned, and a quantitative result of data containing the values of Hamiltonian energy, specific heat, magnetization, susceptibility, and amount of vortices in a system with temperature below and above the critical temperature  $T_c$  has also been obtained. Moreover, different critical temperature value obtained for both lattice size tested;  $T_c = 1.1$  for system with lattice size  $16 \times 16$  and  $T_c = 1.0$  for system with lattice size  $256 \times 256$ , proving that critical temperature of a finite-size lattice would be shifted. The obtained  $T_c$  values for both finite-size systems are close to the ideal critical temperature for Kosterlitz-Thouless transition,  $T_{KT} = 0.892$ .

**keywords:** spin models; 2D XY; Monte Carlo simulation; Kosterlitz-Thouless transition

## 1. Pendahuluan

Studi terkait permodelan atas sekumpulan momen dipol magnet, atau selanjutnya disebut model spin, merupakan cakupan riset yang menarik dalam bidang fisika zat padat. Sebagai contoh, model spin Ising mendeskripsikan dimana spin (dipol magnet) hanya memiliki 2 kemungkinan kondisi (spin up atau spin down). Terdapat pula model spin Heisenberg yang vektor spinnya dapat menunjuk ke segala arah dalam 3 dimensi. Kedua model ini merupakan kondisi khusus dari model N-vector dimana model Ising dan Heisenberg berturut-turut dapat disebut juga model  $O(1)$  dan  $O(3)$ . Model XY sendiri, yang nantinya akan digunakan dalam tulisan ini, dapat pula disebut model  $O(2)$  atau model rotator klasik. Ditinjau dari permodelan Pott dimana spin digambarkan dalam kisi 2 dimensi dan memiliki  $q$  kemungkinan arah, maka

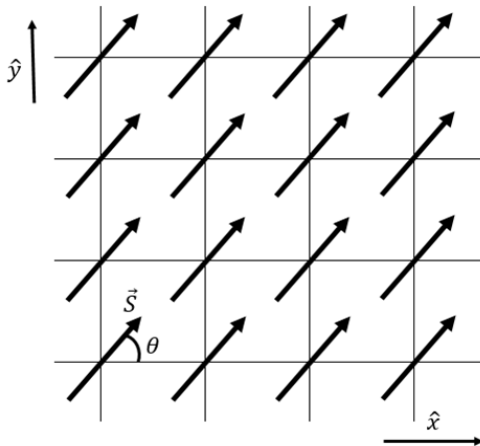
pada  $q = 2$  model Pott akan menjadi ekuivalen dengan model Ising, dan pada  $q \rightarrow \infty$  model tersebut akan ekuivalen dengan model XY.

Suatu model spin dapat ditinjau dari berbagai pengelompokan model spin, misalnya model N-vector. Dalam pengelompokan ini, model spin ditinjau dari banyaknya derajat kebebasan spin dalam model tersebut. Sebagai contoh, model Ising yang memiliki 2 kemungkinan arah spin yaitu ke atas dan ke bawah. Dapat dikatakan bahwa model Ising memiliki vektor dalam 1 dimensi, sehingga dinamakan model  $O(1)$ . Demikian pula dengan model spin XY yang arah spinnya memiliki vektor dalam 2 dimensi disebut model  $O(2)$ , dan model Heisenberg yang memiliki vektor dalam 3 dimensi disebut model  $O(3)$ .

Pada tahun 1925, Wilhelm Lenz dan Ernst Ising menemukan bahwa jika interaksi terjadi di antara spin sehingga spin paralel dalam kisi kristal saling tarik satu sama lain dan spin antiparalel akan saling tolak, maka pada suhu yang cukup rendah, seluruh

\*Korespondensi: mega.chistivana@gmail.com

Informasi lengkap tentang penulis dapat dilihat pada akhir artikel



Gambar 1: Sketsa model XY 2 dimensi. Spin  $S$  dilambangkan dengan vektor dengan panjang 1 satuan dengan arah  $\theta$  terhadap sumbu  $x$

spin akan menjadi sejajar, dan permodelan atas hal tersebut mungkin dapat memberikan penjelasan atom ferromagnetik. [1]

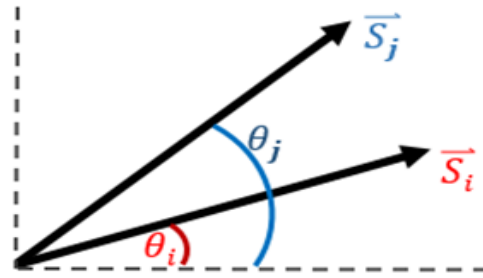
Selain model Ising, terdapat juga bentuk permodelan spin magnetik lain yaitu model XY. Nama “XY” menunjukkan derajat kebebasan dari sebuah spin individual dalam model tersebut, sehingga “model XY 2 dimensi” berarti sebuah permodelan dimana sekelompok spin yang mampu bergerak dalam “bidang x-y” tersusun dalam “sistem 2 dimensi”

Pada model XY 2 dimensi, spin dengan panjang 1 unit digambarkan tersusun dalam kisi 2 dimensi. Tidak seperti spin dalam model Ising yang hanya memiliki 2 kemungkinan arah rotasi, spin pada model XY, spin  $S$  dapat bebas berotasi dalam bidang kisi 2 dimensi. Energi sistem spin untuk model XY diberikan sebagai

$$H = -J \sum_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j) \tag{1}$$

dimana pada model ini nilai konstanta kopling  $J > 0$  untuk bahan ferromagnetik. Nilai  $J$  pada penelitian ini diberikan senilai  $J = 1$  dan konstanta Boltzman  $k_B = 1$ , sehingga nilai suhu sistem  $T$  dalam perhitungan dapat terskala (nilai  $T$  maupun  $T_c$  tidak berdimensi dan konsisten terhadap nilai  $T_{KT}$ )

Selain energi Hamiltonian dan magnetisasi yang telah dijabarkan di atas, model spin memiliki beberapa parameter lain yang memiliki kaitan erat terhadap sifat-sifat kemagnetannya. Parameter-parameter ini juga merupakan besaran yang nilainya berubah seiring perubahan suhu.



Gambar 2: Sketsa keadaan dan variabel interaksi spin  $i$  dan spin  $j$  dalam model XY 2 dimensi

Kapasitas panas ( $C_v$ ) merupakan perbandingan banyaknya kalor yang diperlukan untuk menaikkan suhu suatu material per satu satuan suhu. Sementara kapasitas panas khusus ( $c_v$ ) merupakan perbandingan kapasitas panas dengan ukuran sistem.

Besaran ( $c_v$ ) dirumuskan oleh persamaan sebagai berikut:

$$c_v = \frac{1}{k_B T^2} (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) \tag{2}$$

Yang mana dapat diartikan bahwa kapasitas panas khusus merupakan turunan pertama dari energi Hamiltonian ( $H$ , atau dapat ditulis pula sebagai  $E$ ) pada persamaan (1).

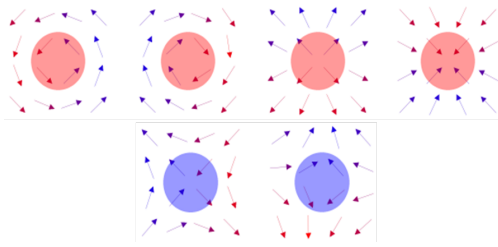
Suseptibilitas magnetik adalah besaran yang menunjukkan respon bahan terhadap medan magnet luar. Dengan mengetahui nilai suseptibilitas magnetik suatu bahan, maka dapat diketahui sifat-sifat magnetik lain dari bahan tersebut. Suseptibilitas magnetik didefinisikan sebagai

$$\chi = \frac{M}{H} \tag{3}$$

yaitu merupakan perbandingan antara magnetisasi dengan intensitas medan magnet luar. Namun dikarenakan dalam penelitian ini diberikan batasan berupa ketiadaan medan magnet luar, maka suseptibilitas magnetik diperhitungkan sebagai divergensi dari magnetisasi, atau dirumuskan

$$\chi = \frac{1}{k_B T} (\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2) \tag{4}$$

Hal ini berarti, nilai suseptibilitas magnetik akan relatif rendah apabila perubahan nilai magnetisasi



Gambar 3: Vortex negatif ditandai dengan lingkaran merah dan positif vortex ditandai dengan lingkaran biru [3]

sebagai fungsi suhu tidak signifikan. Suseptibilitas magnet  $\chi$  merupakan besaran tak berdimensi.

*Vortex* merupakan suatu bentuk khusus dari *topological defect*. *Topological defect* secara umum dideskripsikan sebagai titik atau daerah dimana keteraturan yang ada menjadi rusak. Pada umumnya *topological defect* memiliki sifat tertentu yang membuat keberadaannya dapat diidentifikasi maupun diukur [2]. Pembentukan *vortex* sebagai *topological defect* pada model XY 2 dimensi hanya terjadi pada suhu diatas suhu kritis  $T_{KT}$ .

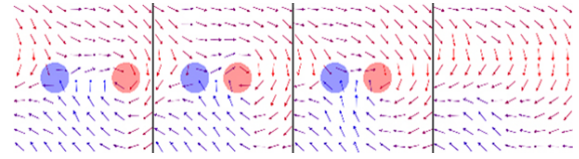
Pada gambar 3 dijelaskan bahwa pada model ini dikenal 2 jenis vortex ditinjau dari nilai *winding number*, yaitu *vortex* dengan *winding number* positif (bertanda lingkaran merah) dan *vortex* dengan *winding number* negatif (bertanda lingkaran biru). *winding number* melambangkan karakterisasi/kekuatan sebuah vortex, dan besarnya ditentukan berdasarkan arah dan posisi masing-masing spin pembentuk *vortex*. Nilai *winding number*  $k$  dirumuskan sebagai:

$$\theta_i = k\phi + \theta_0 \quad (5)$$

Dimana  $\theta_i$  merupakan sudut yang dibentuk salah satu spin pembentuk *vortex* (spin  $i$ ), terhadap sumbu horizontal dari kisi, dihitung dari pusat *vortex*.  $k$  merupakan *winding number* dari *vortex*,  $\phi$  merupakan sudut relatif dari spin  $i$  tersebut dan  $\theta_0$  merupakan konstanta.[2]

Kedua jenis *vortex* ini akan saling menghilangkan apabila bertemu satu sama lain karena nilai *winding number*nya yang saling meniadakan (gambar 4).

Transisi Kosterlitz-Thouless merupakan transisi khusus dalam model XY 2 dimensi yang terjadi pada  $T_{KT}$ , yang mana memisahkan bagian “suhu rendah” (yaitu pada  $T < T_{KT}$ ) dengan bagian “suhu tinggi” (pada  $T > T_{KT}$ ). Kedua keadaan ini (suhu “rendah” dan suhu “tinggi”) dibatasi oleh adanya suhu kritis  $T_c$



Gambar 4: Vortex negatif dan vortex positif saling mendekat dan menghilangkan setelah bertemu [3]

```

1  #!/bin/bash
2
3  ## Change these variables as needed ##
4  Tinc=0.1
5  Tstart=0
6  Tend=2
7
8  ITERATIONS=10000 # Iterations to reach
9                    # equilibrium
10 INIT_ITER=100000 # spins to initialize first run,
11                  # when starting from nonzero temperature
12 AVG_ITER=10000   # Measurement
13 SIZE=8           # Lattice size
14 #####
15

```

Gambar 5: Tampilan script energy.sh pada bagian input yang nilainya dapat diganti sesuai kebutuhan

yang nilainya bergantung pada ukuran sistem, dimana pada sistem ideal  $N \rightarrow \infty$ , nilai suhu kritis ini akan mendekati  $T_{KT} = 0.892$  [4][5][6]

Pada sistem dengan ukuran yang terbatas misalnya dalam simulasi numerik, panjang korelasi tidak dapat terdivergensi, sehingga divergensinya (yang ditandai dengan puncak pada kurva turunan pertama) akan terbulatkan dan mengalami pergeseran [7]. Fenomena ini disebut *finite-size scaling behaviour*. Fenomena ini pula yang nantinya akan mempengaruhi besarnya nilai suhu kritis untuk masing-masing ukuran kisi. Semakin besar ukuran kisi, semakin mendekati sistem yang ideal yaitu sistem dengan ukuran yang tak terbatas.

## 2. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian di bidang komputasi dengan perangkat keras berupa 1 unit PC Komputer disertai dengan sistem operasi Debian digunakan untuk menjalankan simulasi dari pemrograman bahasa C.[3]

Hasil dari eksekusi program tersebut belum memiliki fungsi penyimpanan data simulasi berupa gambar, namun dalam rangkaian program ini disediakan sebuah *script* dengan nama *energy.sh* yang berisi perintah untuk melakukan pengambilan data simulasi berupa nilai kuantitatif dari berbagai besaran.

Sebagai penjelasan, yang merupakan input dan dapat disesuaikan isinya adalah teks yang berwarna merah pada baris ke 4, 5, 6, 8, 10, 12, dan 13.

Dengan menyesuaikan beberapa nilai input pada isi script sesuai kebutuhan, dapat dilakukan pengambilan data dengan mengeksekusi program *xymodel* dan *mcrun* (tanpa *glvec*, sehingga tidak akan muncul jendela berisikan plot dari model spin). Data yang diambil adalah nilai energi Hamiltonian ( $E$ ), kapasitas panas khusus ( $c_v$ ), magnetisasi ( $M$ ), suseptibilitas magnetik ( $\chi$ ), dan kuantitas *vortex*; seluruhnya sebagai fungsi dari suhu sistem.

Data yang masih berupa *array* ini akan disimpan dalam *file energy.dat*, dan dapat diplotkan ke dalam grafik dengan suhu sistem ( $T$ ) pada sumbu x, kemudian disimpan dalam *file pdf*.

`./energy.sh vortex energy.dat` (mengeksekusi simulasi dan pengambilan data  $E$ ,  $c_v$ ,  $M$ ,  $\chi$ , dan *vortex* dengan input sesuai yang tertera pada script tanpa menampilkan gambar, lalu menyimpan datanya dalam *file 'energy.dat'*)

`gnuplot plot/energy.gpi` (mengeksekusi *file energy.gpi* yang terletak dalam folder *plot* yang berisi perintah untuk membuat plot grafik dengan program Gnuplot berdasarkan data yang tertera pada *file energy.dat* dan menuliskannya dalam *file energy.mp*)

`mptopdf energy.mp` (mengkonversi *file energy.mp* menjadi 7 *file pdf* terpisah yang masing-masing memuat 1 grafik data)

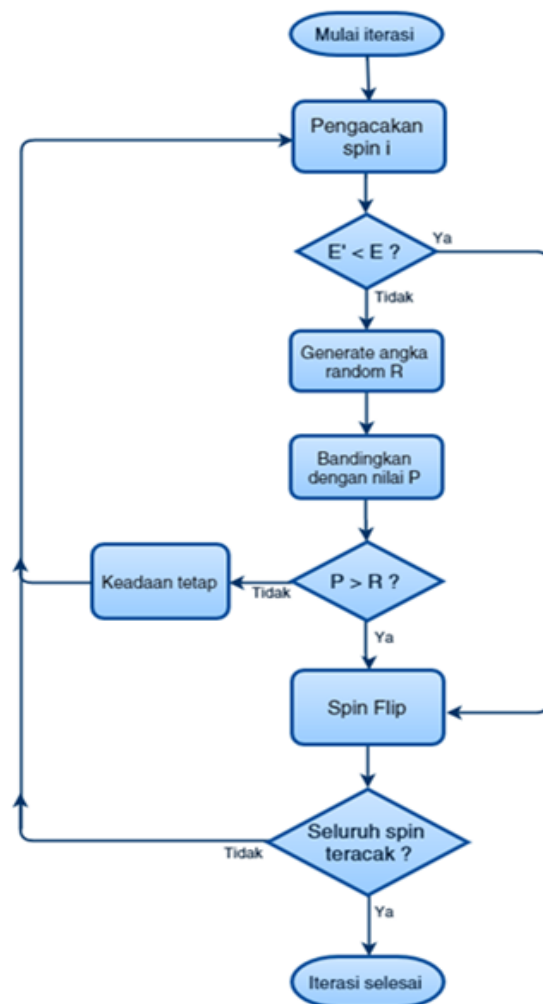
Diagram alur untuk pengekseskuan simulasi Monte Carlo dijelaskan pada gambar 6.

### 3. Hasil dan Pembahasan

Nilai energi Hamiltonian akan meningkat seiring dengan kenaikan suhu sistem. Grafik  $E$  versus  $T$  pada gambar 7 dan gambar 8 menggambarkan kesebandingan tersebut.

Nilai  $E$  pada grafik untuk ukuran sistem  $N = 16$  terus mengalami peningkatan, namun terlihat mengalami kenaikan drastis pada kisaran  $T = 1.1$  (mengakibatkan adanya titik-titik data yang agak terputus) dan setelahnya kurva kembali landai. Kenaikan drastis pada nilai energi Hamiltonian tersebut terlihat pada kisaran suhu  $T = 1.1$ , yang menandakan suhu kritis senilai  $T_c = 1.1$  untuk ukuran sistem  $N = 16$ , yang mana juga menandakan suhu saat terjadinya transisi Kosterlitz-Thouless.

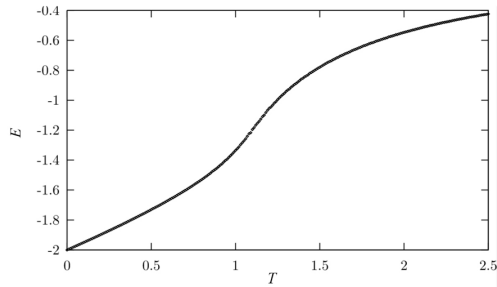
Sementara itu pada ukuran sistem  $N = 256$ , nilai  $E$  juga mengalami peningkatan, namun pada ukuran ini kenaikan drastis terjadi pada kisaran  $T = 1.0$  dan setelahnya kurva kembali landai. Kenaikan drastis pada nilai energi Hamiltonian tersebut terjadi pada suhu kritis  $T_c = 1.0$  untuk ukuran sistem  $N = 256$ , yang mana juga menandakan terjadinya transisi Kosterlitz-Thouless.



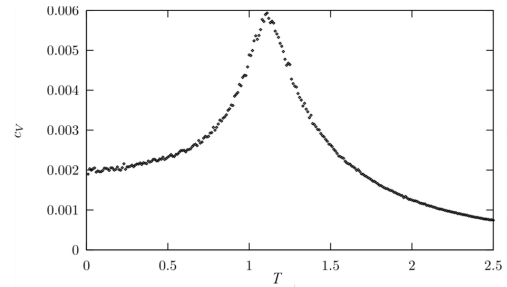
Gambar 6: Diagram alir simulasi Monte Carlo

Menurut persamaan 2, nilai kapasitas panas khusus yang merupakan turunan pertama dari energi Hamiltonian akan membentuk kurva parabola, dengan puncak nilai pada saat suhu kritis  $T_c$ . Grafik  $c_v$  versus  $T$  pada gambar 9 dan gambar 10 menggambarkan hubungan tersebut.

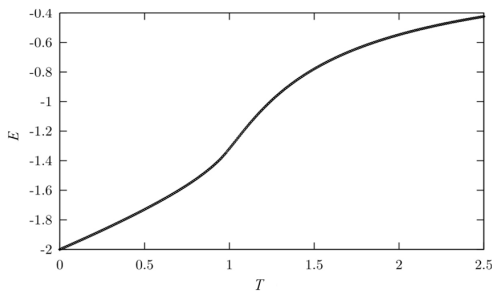
Kapasitas panas khusus  $c_v$  merupakan variansi dari nilai  $E$ , sehingga pada saat nilai  $E$  mengalami peningkatan drastis,  $c_v$  akan bernilai tinggi. Pada sistem dengan ukuran  $N = 16$ , nilai  $c_v$  pada awalnya relatif rendah dan tidak banyak mengalami perubahan, namun terlihat pada grafik bahwa pada  $T = 1.1$  nilai  $c_v$  relatif tinggi. Hal ini sesuai dengan bentuk kurva energi untuk ukuran sistem yang sama (gambar 5.1) dimana pada suhu tersebut nilai  $E$  juga mengalami peningkatan yang curam. Setelah melewati  $T = 1.1$ , nilai  $c_v$  mengalami penurunan, sesuai dengan kemiringan kurva energi yang kembali



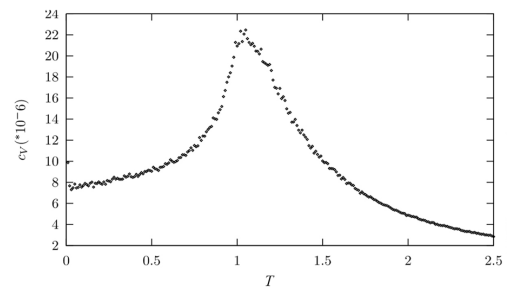
Gambar 7: Grafik hubungan energi Hamiltonian ( $E$ ) per spin terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 16$



Gambar 9: Grafik hubungan kapasitas panas khusus ( $c_v$ ) dengan suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 16$



Gambar 8: Grafik hubungan energi Hamiltonian ( $E$ ) per spin terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 25$



Gambar 10: Grafik hubungan kapasitas panas khusus ( $c_v$ ) dengan suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 256$

melandai. Puncak tersebut menandakan dengan jelas posisi suhu kritis  $T_c = 1.1$  untuk ukuran sistem  $N = 16$ .

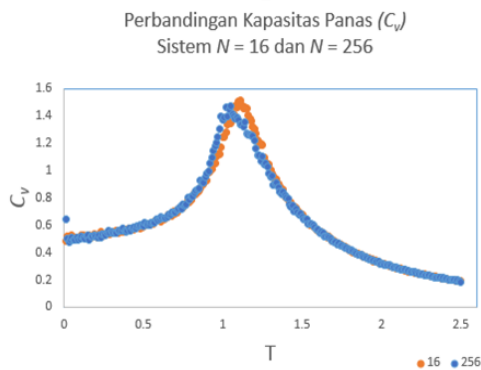
Sementara itu, pada ukuran sistem  $N = 256$ , nilai  $c_v$  juga mengalami peningkatan serupa, namun kali ini puncaknya berada pada kisaran  $T = 1.0$ ; sedikit bergeser dibandingkan dengan puncak pada grafik untuk ukuran sistem  $N = 16$ . Pada suhu yang lebih tinggi, nilai  $c_v$  terus mengalami penurunan. Puncak tersebut menandakan posisi suhu kritis  $T_c = 1.0$  untuk ukuran sistem  $N = 256$ .

Pada pengamatan lebih lanjut, diamati bahwa nilai  $c_v$  dari kedua grafik kapasitas panas khusus di atas memiliki orde yang berbeda ( $10^{-3}$  pada ukuran sistem  $N = 16$  dan  $10^{-6}$  pada ukuran sistem  $N = 256$ ). Hal ini dikarenakan nilai dari kapasitas panas khusus  $c_v$  dipengaruhi oleh ukuran sistem. Untuk menguji apakah data yang diperoleh memiliki presisi yang baik, dilakukan penghitungan nilai kapasitas panas  $c_v$  dengan cara mengalikan data  $c_v$  dengan ukuran sistemnya, yaitu  $N^2$ . Data yang telah dihitung dan diperoleh data nilai  $c_v$  untuk kedua ukuran sistem diplot ke dalam satu grafik seperti pada gambar 11. Terlihat pada grafik tersebut bahwa nilai kurva

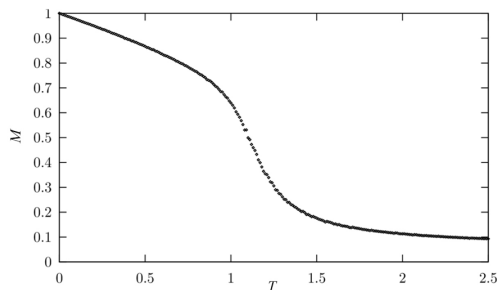
kapasitas panas untuk kedua sistem hampir berhimpit, hanya puncaknya sedikit bergeser. Pada sistem dengan ukuran  $N = 16$ , puncak kurvanya terjadi pada  $T = 1.1$ , sementara pada sistem dengan ukuran  $N = 256$  puncaknya terjadi pada  $T = 1.0$ .

Nilai magnetisasi akan mengalami penurunan seiring bertambahnya suhu sistem  $T$ , karena spin-spin dalam sistem akan semakin tidak tersearahkan seiring dengan peningkatan suhu sistem, dan sistem yang spin-spin didalamnya tidak tersearahkan akan menyebabkan nilai  $M$  yang rendah. Grafik  $M$  versus  $T$  pada gambar 12 dan gambar 13 menggambarkan hubungan tersebut.

Nilai  $M$  pada  $T = 0$  mendekati 1 karena hampir seluruh spinnya searah. Secara keseluruhan nilai  $M$  akan selalu menurun seiring dengan peningkatan suhu, namun pada grafik nampak adanya penurunan drastis yaitu pada kisaran suhu  $T = 1.1$  (menyebabkan adanya titik-titik data yang agak terputus), dan setelahnya kembali menurun dengan landai hingga semakin mendekati nilai nol. Penurunan ini membuktikan sifat magnetisasi bahan yang akan semakin mendekati nol pada suhu tinggi fluktuasi termal lebih besar daripada interaksi



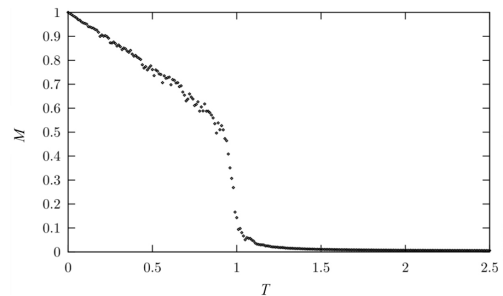
Gambar 11: Perbandingan nilai kapasitas panas ( $C_v$ ) untuk sistem  $N = 16$  dan sistem  $N = 256$



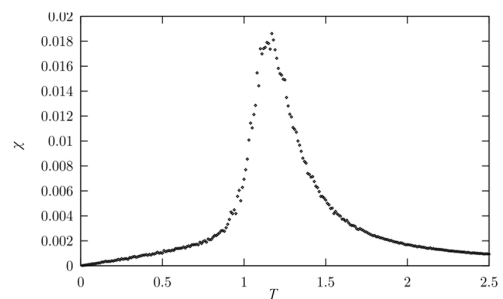
Gambar 12: Grafik hubungan magnetisasi ( $M$ ) terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 16$

antar spin, sehingga spin cenderung untuk bersifat isotropik (*disordered*). Penurunan drastis terhadap nilai magnetisasi pada suhu kritis  $T_c = 1.1$  (untuk ukuran sistem  $N = 16$ ) menandakan terjadinya transisi Kosterlitz-Thouless.

Pada sistem berukuran  $N = 256$ , nilai  $M$  pada  $T = 0$  juga mendekati 1 karena hampir seluruh spinnya searah. Nilai ini mulanya mengalami penurunan yang landai pada  $T = 0$  hingga  $T = 0.9$ , kemudian turun secara drastis pada kisaran  $T = 1.0$  (menyebabkan adanya titik-titik data yang terputus-putus) dan setelahnya menurun semakin mendekati nilai nol. Penurunan drastis terhadap nilai magnetisasi pada suhu kritis  $T_c = 1.1$  (untuk ukuran sistem  $N = 256$ ) menandakan terjadinya transisi Kosterlitz-Thouless. Penurunan drastis tersebut tampak menunjukkan gejala diskontinuitas, namun hal ini kemungkinan disebabkan oleh kurangnya iterasi semata. Pada batas iterasi yang lebih besar, diekspetasikan gejala diskontinuitas tersebut tidak lagi nampak (kurva akan lebih halus dan tidak terlihat “patah” pada daerah transisi fase)



Gambar 13: Grafik hubungan magnetisasi ( $M$ ) terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 256$



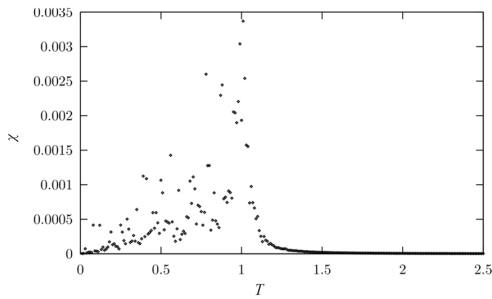
Gambar 14: Grafik hubungan suseptibilitas magnetik ( $\chi$ ) terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 16$

Menurut persamaan 4, nilai suseptibilitas magnetik yang merupakan turunan pertama dari magnetisasi akan membentuk kurva seperti pada gambar 14 dan 15, dengan puncak nilai pada saat terjadi perubahan drastis pada nilai  $M$ , yang mana akan menandakan posisi suhu kritis  $T_c$ . Grafik  $\chi$  versus  $T$  pada gambar 14 dan gambar 15 menggambarkan hubungan tersebut.

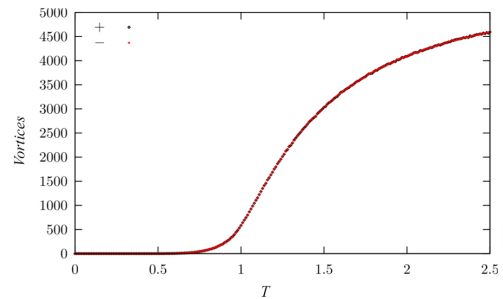
Nilai  $\chi$  merupakan variansi dari nilai  $M$  sehingga besarnya dipengaruhi oleh fluktuasi nilai  $M$ . Nilai  $\chi$  akan tinggi pada saat nilai  $M$  pada suhu tersebut mengalami perubahan yang drastis, yaitu pada kisaran  $T = 1.1$  untuk ukuran sistem  $N = 16$ . Bersesuaian dengan persamaan 4, puncak kurva pada grafik memiliki puncak pada  $T = 1.1$  mengikuti kenaikan curam pada kurva magnetisasi, yang mana menggambarkan suhu kritis untuk ukuran sistem  $N = 16$ .

Nilai  $\chi$  nampak sedikit acak terutama di sekitar bagian suhu rendah pada grafik untuk ukuran sistem  $N = 256$ , namun dari titik-titik data pada bagian suhu tinggi masih dapat diperkirakan posisi puncak yaitu pada kisaran  $T = 1.0$  dan setelahnya menurun hingga mendekati nol. Bentuk grafik yang sedikit acak ini dikarenakan kurangnya iterasi sehingga data

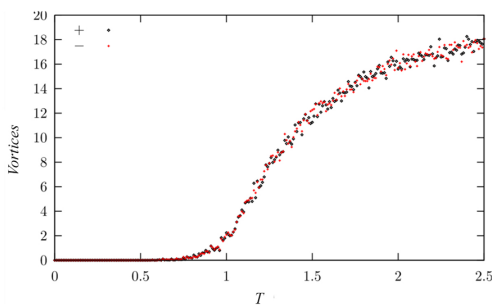




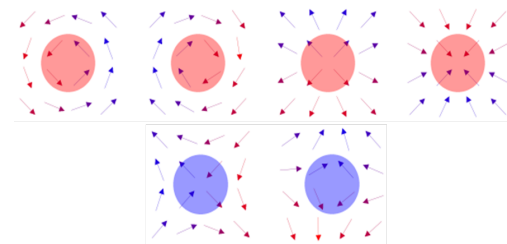
Gambar 15: Grafik hubungan suseptibilitas magnetik ( $\chi$ ) terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 256$



Gambar 17: Grafik hubungan pembentukan *vortex* terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 256$



Gambar 16: Grafik hubungan pembentukan *vortex* terhadap suhu sistem ( $T$ ) untuk ukuran sistem  $N = 16$



Gambar 18: Perbandingan *vortex* per banyaknya spin untuk sistem  $N = 16$  dan sistem  $N = 256$

yang terambil belum mencapai nilai sesungguhnya, dan setelah diplot ke dalam grafik akan kurang menggambarkan bentuk ideal kurva suseptibilitas.

Secara umum, jumlah *vortex* yang muncul akan mengalami peningkatan seiring bertambahnya suhu sistem  $T$ . Idealnya pada suhu dibawah suhu kritis  $T_c$  tidak ada *vortex* yang terbentuk, namun tidak tertutup kemungkinan terdapat beberapa *vortex* yang muncul. Grafik *Vortices* versus  $T$  pada gambar 16 dan 17 menggambarkan hubungan tersebut.

Dapat terlihat pada grafik bahwa *vortex* sempat muncul pada kisaran suhu  $T = 0.6$ , namun baru mulai meningkat drastis pada kisaran suhu  $T = 1.1$  dan terus bertambah jumlahnya seiring peningkatan suhu sistem. Kemunculan *vortex* yang drastis ini menggambarkan terjadinya transisi Kosterlitz-Thouless sekaligus menunjukkan suhu kritis  $T_c$  untuk ukuran sistem  $N = 16$  yaitu senilai  $T_c = 1.1$ .

Pada grafik tidak terlihat kemunculan *vortex* dalam jumlah yang signifikan pada suhu dibawah  $T = 0.9$ , namun saat suhu sistem telah diatas  $T = 1.0$ , jumlah *vortex* yang muncul mulai meningkat drastis dan terus bertambah seiring peningkatan suhu sistem. Kemunculan *vortex* yang drastis ini menggambarkan

terjadinya transisi Kosterlitz-Thouless sekaligus menunjukkan suhu kritis  $T_c$  untuk ukuran sistem  $N = 256$  yaitu senilai  $T_c = 1.0$ .

Perbedaan *vortex* dengan *winding number* negatif dan *vortex* untuk *winding number* positif tidak begitu nampak pada grafik dengan ukuran sistem yang relatif besar ( $N = 256$ ) karena total *vortex* yang terbentuk sudah mencapai orde ribuan. Berbeda halnya dengan *vortex* pada sistem dengan ukuran  $N = 16$  yang kuantitas *vortex*nya masih berada dibawah skala 20 meskipun suhu sistem sudah relatif tinggi ( $T = 2.5$ ), sehingga perbedaan yang timbul cukup nampak.

Setelah dibuat plot grafik perbandingan dari kuantitas *vortex* antara kedua ukuran sistem tersebut, diperoleh dua kurva yang serupa (gambar 18), namun apabila diperhatikan kurva untuk ukuran sistem yang lebih kecil ( $N = 16$ ) polanya sedikit bergeser. Idealnya, kuantitas *vortex* mengalami kenaikan curam pada  $T = 0.892$ , dan pola kenaikan curam dari data untuk ukuran sistem  $N = 256$  lebih mendekati nilai tersebut.

Berdasarkan hasil yang telah dijabarkan di atas, dapat disimpulkan bahwa kelima besaran tersebut nilainya berubah seiring dengan perubahan suhu sistem, serta terdapat perbedaan bentuk kurva pada bagian suhu “rendah” dan pada bagian suhu “tinggi” dimana kedua bagian ini dibatasi oleh suhu kritis

$T_c$ . Nilai suhu kritis pada sistem berukuran terbatas sedikit mengalami pergeseran dari nilai ideal untuk suhu kritis  $T_{KT}$ . Dilihat dari grafik-grafik di atas, sistem dengan ukuran  $N = 16$  menunjukkan tanda-tanda transisi pada kisaran suhu sistem  $T = 1.1$ , sedangkan pada sistem dengan ukuran  $N = 256$  tanda-tanda tersebut terjadi pada kisaran suhu  $T = 1.0$ . Keduanya mengalami pergeseran dibanding dengan nilai ideal dari suhu kritis untuk transisi Kosterlitz-Thouless yaitu senilai  $T_c = 0.892$ .

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan maka diperoleh kesimpulan bahwa simulasi model spin XY 2 dimensi telah berhasil dilakukan dengan mengeksekusi sebuah rangkaian program dalam bahasa C dalam terminal sistem operasi Debian. Besaran energi Hamiltonian ( $E$ ), kapasitas panas khusus ( $c_v$ ), magnetisasi ( $M$ ), susceptibilitas magnetik ( $\chi$ ), dan kuantitas *vortex* nilainya dipengaruhi oleh suhu sistem  $T$ . Ukuran sistem yang terbatas mempengaruhi nilai suhu kritis ( $T_c$ ), dimana pada sistem dengan ukuran yang jauh lebih besar, nilai ( $T_c$ ) akan semakin mendekati nilai suhu kritis untuk sistem ideal yaitu ( $T_{KT} = 0.892$ ).

#### Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih Dr. Guntur Maruto sebagai kepala Laboratorium Fisika Atom dan Inti FMIPA UGM atas izin yang telah diberikan. Terimakasih kepada Bapak Dr. Iman Santoso dan bapak Dr. Moh. Adhib Ulil Absor, M.Sc yang telah memberikan saran dan masukan dalam penelitian ini.

#### Pustaka

1. Domb, C.: Ising model. In: Biswas, S., Sen, P. (eds.) Phase Transition and Critical Phenomena vol. 80, pp.027101-1-4 edn., pp. 357–478. Academic Press, London (2009)
2. Chaikin, P.M., Lubensky, T.C. (eds.): Principles of Condensed Matter Physics. Cambridge University Press, Cambridge (1995)
3. Käser, A and Maier, T and Rautenkranz, T: The 2D XY Model. [http://quantumtheory.physik.unibas.ch/people\\_index.html](http://quantumtheory.physik.unibas.ch/people_index.html) (2007). Käser, A and Maier, T and Rautenkranz, T
4. Olsson, P.: Monte carlo analysis of the two-dimensional xy model. ii. comparison with the kosterlitz renormalization-group equations. Physical Review B (1995)
5. Kosterlitz, J.M., Thouless, D.J.: Ordering, metastability, and phase transition in two-dimensional systems. Journal of Physics C: Solid State Physics (1973)
6. Kosterlitz, J.M.: The critical properties of the two-dimensional xy model. journal of physics c: Solid state physics. In: Skomski, R. (ed.) Simple Models of Magnetism, p. 1046. Oxford University Press, London (2008)
7. Janke, W.: Monte carlo simulations for spin systems. In: Hoffmann, K.H., Schreiber, M. (eds.) Computational Physics: Selected Methods, Simple Exercises, Serious Applications, pp. 10–40 (1996). Berlin: Springer