

**SIMULASI KONFIGURASI *VORTEX* DI BAWAH PENGARUH  
MEDAN MAGNET LUAR PADA SUPERKONDUKTOR  
*MESOSCOPIC* BERGEOMETRI SEGITIGA**  
(Simulation of vortex configuration under influence of an external magnetic field in  
triangle mesoscopic superconductors)

Grace Loupatty<sup>1</sup> dan Pekik Nurwantoro<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Fakultas MIPA, Universitas Pattimura

<sup>2</sup>Jurusan Fisika, FMIPA Universitas Gadjah Mada

**ABSTRAK**

Telah dilakukan penyelesaian persamaan Ginzburg-Landau gayut waktu (TDGL), untuk melihat konfigurasi *vortex* dan mengetahui pengaruh ukuran bahan superkonduktor *mesoscopic* bergeometri segitiga. Metode Euler digunakan dalam pendekatan beda hingga bagi derivatif terhadap waktu persamaan TDGL.

Konfigurasi *vortex* ini disimulasikan pada superkonduktor tipe II berukuran  $4\xi \times 8\xi$ ,  $8\xi \times 16\xi$ , dan  $16\xi \times 32\xi$  dengan parameter Ginzburg-Landau  $\kappa = 2$  dan variasi medan luar  $H_{z,ext}$ .

Hasil yang diperoleh berupa konfigurasi nilai parameter benahan, nilai induksi magnet, energi bebas Gibbs dan magnetisasi bahan. Dari hasil yang diperoleh terlihat bahwa konfigurasi *vortex* yang terbentuk tergantung pada ukuran bahan. Makin besar ukuran bahan, makin banyak *vortex* yang terbentuk. Konfigurasi *vortex* juga tergantung pada nilai medan magnet luar yang diberikan. Nilai magnetisasi sebagai fungsi waktu tergantung pada ukuran bahan. Variasi ukuran bahan berpengaruh juga pada energi bebas Gibbs. Energi bebas Gibbs akan semakin negatif jika diberikan variasi medan magnet luar yang makin besar.

**Kata kunci:** persamaan Ginzburg-Landau gayut waktu, *vortex*, energi bebas Gibbs

**ABSTRACT**

The solution of the time dependent Ginzburg-Landau (TDGL) equation was done to seek the vortex configuration and the size dependence of triangle mesoscopic superconductor. The Euler method was used to approach the finite difference for the time derivative in TDGL equations.

This vortex configurations of the type II superconductors were simulated in the existance of an external magnetic field  $H_{z,ext}$  on the Ginzburg-Landau parameter  $\kappa = 2$  and on various sizes of  $4\xi \times 8\xi$ ,  $8\xi \times 16\xi$ ,  $16\xi \times 32\xi$ .

The resulting simulations were presented in the form of the configuration of the order parameter, magnetic induction, Gibbs free energy and magnetization substance. The obtained results were used to seek vortex configurations which were formed depend on the size of substance. When the sizes of superconductor were increased, the resulting vortex would also increased. Vortex configurations were observed dependent on the applied magnetic field. Time dependent of magnetization was influenced by the size of superconductor. Size variations of substance had affected on the Gibbs free energy. Finally, the Gibbs free energy decreased progressively as an external magnetic field  $H_{z,ext}$  increased.

**Keywords:** time dependent Ginzburg-Landau equation, *vortex*, Gibbs free energy

## 1. PENDAHULUAN

Kemajuan teknologi dalam fabrikasi superkonduktor berukuran nano telah mendorong untuk meneliti struktur *mesoscopic*, seperti baji, bujursangkar, segitiga, dan lain-lain (Misko *dkk*, 2002). Superkonduktor *mesoscopic* yaitu superkonduktor yang berukuran lebih kecil dibanding parameter Ginzburg-Landau  $\kappa$ . Hal yang muncul pada skala *mesoscopic* ini adalah bahwa geometri bahan akan berpengaruh terhadap superkonduktivitas dalam sampel.

Untuk melihat fenomena *vortex* pada superkonduktor dilakukan simulasi numerik terhadap suatu sistem yang mewakili keadaan superkonduktor bahan. Penyelesaian numerik didasarkan pada persamaan yang ditemukan oleh Ginzburg dan Landau yang dikenal sebagai persamaan Ginzburg-Landau gayut waktu (*Time Dependent Ginzburg-Landau*) yang umum disingkat persamaan TDGL.

Persamaan TDGL adalah persamaan tak linear dan terkopel sehingga tidak mudah untuk menentukan penyelesaiannya, yaitu perhitungan  $\psi(\mathbf{r}, t)$  dan  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Salah satu metode numerik untuk memperoleh penyelesaian persamaan TDGL yaitu dengan menggunakan metode *Euler* untuk pendekatan *beda hingga* bagi derivatif terhadap waktu persamaan TDGL (Gropp *dkk*, 1996).

Penelitian ini bertujuan untuk melihat pengaruh ukuran bahan superkonduktor tipe II terhadap konfigurasi *vortex*, melakukan simulasi konfigurasi *vortex* di dalam bahan superkonduktor tipe II untuk berbagai nilai medan magnet luar homogen, dan memperoleh nilai energi bebas Gibbs dan magnetisasi untuk berbagai nilai medan magnet luar homogen.

## 2. DASAR TEORI

Teori fenomenologis, yang juga sering disebut teori makroskopis superkonduktor, dikemukakan oleh Vitaly Ginzburg dan Lev Landau pada tahun 1950, dengan meninjau nilai energi bebas bahan superkonduktor ketika berada pada keadaan benahan (*order state*).

Bahan superkonduktor tipe-II mempunyai dua buah nilai medan magnet kritis, yaitu

medan kritis rendah  $H_{c1}$  dan medan kritis tinggi  $H_{c2}$ . Dengan demikian terdapat tiga keadaan bahan yaitu keadaan Meissner, keadaan campuran dan keadaan normal. Pada keadaan campuran, efek Meissner pada bahan terjadi secara parsial, yang merupakan akibat dari masuknya medan magnet luar ke dalam bahan. Fluks magnetik yang menerobos bahan superkonduktor dalam bentuk kawat filamen yang tipis dikenal dengan sebutan *vortex*.

Teori Ginzburg-Landau merupakan teori yang diperkenalkan oleh Ginzburg dan Landau, berdasarkan pemikiran bahwa transisi superkonduktor melalui  $T_c$  merupakan transisi orde kedua. Konsep dasar yang diterapkan adalah munculnya keadaan parameter benahan (*order parameter*) pada bahan ketika berada pada fasa bukan normal. Jika pada suatu bahan terdapat parameter benahan, maka bahan tersebut bersifat superkonduktif, namun jika pada bahan tidak memiliki parameter benahan, maka bahan tersebut kehilangan sifat superkonduktifnya.

Beberapa sifat dari superkonduktor dapat dipahami melalui perbandingan dari dua buah panjang karakteristik yang dapat ditentukan dari persamaan Ginzburg-Landau. Dua panjang karakteristik tersebut adalah panjang koherensi  $\xi$  dan panjang terobosan magnetik  $\lambda$ .

Panjang koherensi  $\xi(T)$  menyatakan skala panjang variasi parameter benahan  $\psi(\mathbf{r})$ . Panjang koherensi  $\xi$  didefinisikan sebagai (Nurwantoro, 1998):

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_s|\alpha(T)|}} \quad (1)$$

Panjang terobosan magnetik  $\lambda$  berhubungan dengan variasi spasial dari medan induksi  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  yang berada pada bagian dalam bahan superkonduktor. Panjang terobosan magnetik  $\lambda$  dinyatakan oleh (Nurwantoro, 1998):

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{m_s\beta}{\mu_s e_s^2 |\alpha(T)|}} \quad (2)$$

Perbandingan antara panjang terobosan magnetik dengan panjang koherensi dapat ditentukan dari sifat makroskopis superkonduktor. Perbandingan tersebut disebut parameter Ginzburg-Landau yang dituliskan sebagai berikut:

$$\kappa = \frac{\chi(T)}{\xi(T)} = \sqrt{\frac{2m_s^2\beta}{\mu_0 e_s^2 \hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m^2\beta}{\mu_0 e^2 \hbar^2}} \quad (3)$$

Persamaan Ginzburg-Landau mampu secara lengkap memberikan informasi sistem ketika berada dalam keadaan kesetimbangan. Ungkapan evolusi waktu bagi parameter benahan  $\psi(\mathbf{r}, t)$  dan potensial vektor magnet  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  diperlukan untuk mempelajari dinamika dan keadaan transien bagi sistem untuk menuju kesetimbangan. Ungkapan evolusi waktu bagi dua variabel ini diketahui sebagai penyelesaian persamaan *Time Dependent Ginzburg-Landau* (TDGL) yang berbentuk (Winiecki dan Adams, 2002)

$$\frac{\hbar}{2m_s D} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie_s}{\hbar} \Phi(\mathbf{r}, t) \right) \psi(\mathbf{r}, t) = - \frac{\delta G}{\delta \psi \times (\mathbf{r}, t)} \quad (4)$$

$$\sigma \left( \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = - \frac{\delta G}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)} - \frac{1}{\mu_0} \nabla (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{H}_{ext}(\mathbf{r})) \quad (5)$$

Untuk keperluan komputasi maka akan sangat menguntungkan apabila persamaan TDGL dapat diubah ke bentuk universal yaitu dengan membawa seluruh parameter dan besaran fisis ke bentuk yang tak bersatuan. Langkah ini dapat ditempuh dengan membagi besaran panjang dengan panjang koherensi  $\xi$ , besaran waktu dengan waktu relaksasi  $\tau = \xi^2/D$ , parameter benahan  $\psi(\mathbf{r}, t)$  dengan  $\psi_0 = \sqrt{|\alpha(T)|}/B$  dan potensial vektor magnet  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  dengan  $A_0 = H_{c2}\xi$ .

### 3. METODE KOMPUTASI

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan TDGL yaitu

dengan metode Euler (Buscaglia dkk, 1999) yang berbasis pada metode  $\mathbf{U}-\psi$  (Gropp dkk, 1996). Pendekatan numerik diterapkan pada superkonduktor tipe-II berbentuk segitiga siku-siku di dalam vakum yang terletak di bidang  $x, y$  dan tidak ada arus eksternal di dalam bahan. Pada saat  $t=0$ , di luar bahan diberikan medan magnet luar homogen tak gayut waktu sejajar sumbu  $z$ ,  $\mathbf{H}_{ext} = (0, 0, H_{z,ext})$ . Saat  $t=0$  tersebut, superkonduktor dalam keadaan *Meissner*. Keadaan superkonduktor pada sebarang  $t$  diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan TDGL yang memanfaatkan keadaan *Meissner* sebagai syarat awal. Pemilihan grid komputasi diperoleh dengan cara membagi sisi  $d_1-d_2$  menjadi  $N$  bagian yang tetap dengan lebar setiap bagian adalah  $h_x = d_1 d_2 / N$ . Hal ini juga dilakukan terhadap sisi  $d_1-d_3$  yang menghasilkan  $N$  bagian yang tetap pula dengan lebar setiap bagian  $h_y = d_1 d_3 / N$ . Untuk sisi-miring pada segitiga, pembuatan grid komputasi disesuaikan dengan pembagian grid komputasi yang sama seperti pada arah  $x$  dan  $y$ .

Diskretisasi dilakukan terhadap beberapa besaran yaitu parameter benahan, peubah pautan dan induksi magnet. Selanjutnya diskretisasi diberlakukan pada persamaan TDGL. Bentuk diskret dari  $\psi(x, y, t)$  dan  $U_{i,j}(t)$  dikelompokkan berdasarkan lokasi di dalam grid komputasi yaitu sebagai interior dan permukaan. Langkah terakhir ditempuh dengan menerapkan syarat batas pada ketiga sisi dari geometri segitiga siku-siku.

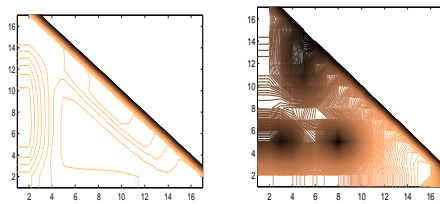
Dalam penelitian ini, variasi terhadap ukuran superkonduktor dipilih sebesar  $4\xi \times 8\xi$ ,  $8\xi \times 16\xi$ ,  $16\xi \times 32\xi$ , sedangkan besar medan magnet luar diambil sebesar  $0.4 H_c$ ,  $0.5 H_c$ ,  $0.6 H_c$ ,  $0.7 H_c$ , dan  $0.8 H_c$ .

Pemrograman yang digunakan adalah paket numerik MATLAB. Bentuk diskret yang mewakili kedua persamaan TDGL diterjemahkan ke dalam sintak pemrograman MATLAB dan ditulis pada MATLAB editor. Semua variabel dan parameter diberikan dalam bentuk nilai-nilai masukan bagi program. Perubahan variabel

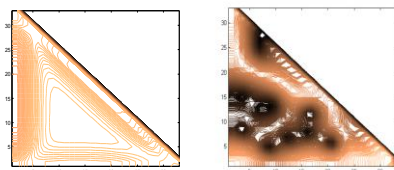
dan parameter dilakukan dengan mengubah nilai yang terkait pada program dan secara otomatis hasil tersebut diwujudkan dalam berbagai bentuk keluaran gambar kontur, nilai rerat  $B_z$ , energi bebas Gibbs, magnetisasi dan matriks benahan.

#### 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

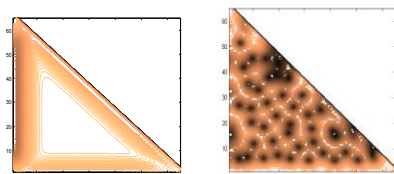
Untuk melihat pengaruh dari ukuran superkonduktor terhadap nilai energi bebas Gibbs, maka telah dilakukan simulasi terhadap beberapa ukuran superkonduktor yaitu:  $4\xi \times 8\xi$ ,  $8\xi \times 16\xi$ , dan  $16\xi \times 32\xi$ . Masukan nilai parameter lainnya dibuat tetap, yaitu ukuran grid untuk kedua arah diambil 0.5, parameter Ginzburg-Landau diambil 2, dan besar medan magnet luar diambil  $0.5 H_c$ . Hasil konfigurasi *vortex* untuk bahan superkonduktor berukuran  $4 \xi \times 8\xi$  dapat dilihat pada gambar 1, untuk bahan berukuran  $8 \xi \times 16\xi$  pada gambar 2, dan untuk bahan berukuran  $16\xi \times 32\xi$  pada gambar 3.



Gambar 1. Konfigurasi *vortex* untuk bahan berukuran  $4\xi \times 8\xi$ ,  $\kappa = 2$ ,  $H_{z,ext} = 0.5$  dan  $t=0.3$  hingga  $t=3000$



Gambar 2. Konfigurasi *vortex* untuk bahan berukuran  $8\xi \times 16\xi$  dengan  $\kappa = 2$ ,  $H_{z,ext} = 0.5$  dan  $t=0.75$  hingga  $t=1500$

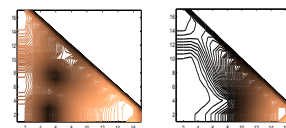


Gambar 3. Konfigurasi *vortex* untuk bahan berukuran  $16\xi \times 32\xi$  dengan  $\kappa = 2$ ,  $H_{z,ext} = 0.5$  dan  $t=1.75$  hingga  $t=900$

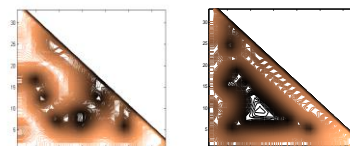
Terlihat bahwa untuk bahan berukuran kecil, *vortex* yang terbentuk lebih sedikit dan waktu yang diperlukan lebih lama. Untuk bahan berukuran lebih besar, *vortex* yang terbentuk lebih banyak dan dengan waktu yang lebih cepat dalam mencapai keadaan kesetimbangan. Ini juga menunjukkan bahwa untuk bahan yang berukuran kecil memiliki fase transien yang lebih lama.

Simulasi juga dilakukan dengan memvariasi besar medan magnet luar yang dikenakan pada bahan superkonduktor. Variasi medan yang dipilih adalah untuk nilai medan magnet luar sebesar  $0.4 H_c$ ,  $0.5 H_c$ ,  $0.6 H_c$ ,  $0.7 H_c$ ,  $0.8 H_c$  dan  $0.9 H_c$  untuk bahan berukuran  $4\xi \times 8\xi$  dengan  $\kappa = 2$ .

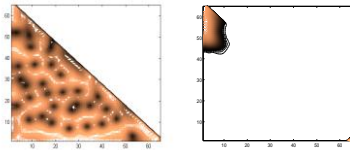
Pada superkonduktor dengan ukuran lebih besar, sifat superkonduktif pada bahan nampak lebih peka terhadap perubahan  $H_{z,ext}$ . Untuk  $H_{z,ext} > H_{c1}$ , artinya dengan perubahan  $H_{z,ext}$  yang kecil ternyata mampu memberikan penambahan jumlah vortex yang besar ke dalam superkonduktor. Hal ini dapat diamati dalam gambar 4 pada berbagai variasi  $H_z$ . Tampak bahwa gambar 5 dan 6, untuk superkonduktor dengan ukuran  $4\xi \times 8\xi$  dan  $16\xi \times 32\xi$ , *vortex* yang terbentuk cenderung lebih sedikit dari keadaan sebelumnya. Terlihat pada bahan berukuran  $16\xi \times 32\xi$ , pada kenaikan medan magnet luar yang makin besar, bahan menuju ke keadaan normal. Hal ini ditunjukkan dengan nilai parameter benahan yang menuju 0.



Gambar 4. Kontur  $|\psi|$  untuk bahan berukuran  $4\xi \times 8\xi$  dengan  $\kappa = 2$  dan  $H_{z,ext} = 0.4$  hingga  $H_{z,ext} = 0.9$



Gambar 5. Kontur  $|\psi|$  untuk bahan berukuran  $8\xi \times 16\xi$  dengan  $\kappa = 2$  dan  $H_{z,ext} = 0.3$  hingga  $H_{z,ext} = 0.8$



**Gambar 6. Kontur  $|\psi|$  untuk bahan berukuran  $16\xi \times 32\xi$  dengan  $\kappa = 2$  dan  $H_{z,ext} = 0.4$  hingga  $H_{z,ext} = 0.7$**

Energi bebas Gibbs superkonduktor untuk berbagai nilai  $H_{z,ext}$  ditunjukkan pada tabel 1 untuk superkonduktor berukuran  $4\xi \times 8\xi$ , pada tabel 2 untuk superkonduktor berukuran  $8\xi \times 16\xi$ , dan pada tabel 3 untuk superkonduktor berukuran  $16\xi \times 32\xi$ .

**Tabel 1. Energi bebas Gibbs, magnetisasi dan Bz untuk berbagai nilai medan  $H_{z,ext}$  untuk bahan berukuran  $4\xi \times 8\xi$  dengan  $\kappa = 2$**

| No | $H_{z,ext}$ | Bz     | G      | Magnetisasi |
|----|-------------|--------|--------|-------------|
| 1  | 0.4         | 0.5224 | -122.9 | -0.0380     |
| 2  | 0.5         | 0.5774 | -151.4 | -0.0416     |
| 3  | 0.6         | 0.6335 | -179.7 | -0.0451     |
| 4  | 0.7         | 0.6851 | -210.7 | -0.0489     |
| 5  | 0.8         | 0.7423 | -254.7 | -0.0523     |
| 6  | 0.9         | 0.7961 | -299.8 | -0.0560     |

**Tabel 2. Energi bebas Gibbs, magnetisasi dan Bz untuk berbagai nilai medan  $H_{z,ext}$  untuk bahan berukuran  $8\xi \times 16\xi$  dengan  $\kappa = 2$**

| No. | $H_{z,ext}$ | Bz     | G      | Magnetisasi |
|-----|-------------|--------|--------|-------------|
| 1   | 0.3         | 0.3000 | -180.8 | -0.0239     |
| 2   | 0.4         | 0.3499 | -242.1 | -0.0279     |
| 3   | 0.5         | 0.4009 | -314.8 | -0.0318     |
| 4   | 0.6         | 0.4589 | -413.9 | -0.0351     |
| 5   | 0.7         | 0.5130 | -516.5 | -0.0388     |
| 6   | 0.8         | 0.5578 | -619.5 | -0.0431     |

**Tabel 3. Energi bebas Gibbs, magnetisasi dan Bz untuk berbagai nilai medan  $H_{z,ext}$  untuk bahan berukuran  $16\xi \times 32\xi$  dengan  $\kappa = 2$**

| No. | $H_{z,ext}$ | Bz     | G       | Magnetisasi |
|-----|-------------|--------|---------|-------------|
| 1   | 0.4         | 0.2542 | -636.3  | -0.0235     |
| 2   | 0.5         | 0.3120 | -875.8  | -0.0269     |
| 3   | 0.6         | 0.3794 | -1166.2 | -0.0295     |
| 4   | 0.7         | 0.4307 | -1498.8 | -0.0334     |

Terlihat bahwa semakin besar kuat medan magnet luar maka energi bebas Gibbs juga semakin negatif. Magnetisasi pada bahan bernilai negatif. Hal ini sesuai dengan teori bahwa dalam keadaan superkonduktor penuh (keadaan *Meissner*), nilai magnetisasi mencapai negatif terhadap medan luar yang diterapkan pada bahan superkonduktor.

## 5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwa konfigurasi *vortex* yang terbentuk tergantung pada ukuran bahan. Makin besar ukuran bahan, makin banyak *vortex* yang terbentuk. Selain itu, konfigurasi *vortex* juga tergantung pada nilai medan magnet luar yang diberikan.

Energi bebas Gibbs berbanding terbalik dengan ukuran bahan dan nilai medan magnet yang diberikan. Makin besar nilai medan magnet luar yang diberikan, maka energi bebas Gibbs akan semakin negatif.

## UCAPAN TERIMAKASIH

Terima kasih kepada Hibah Penelitian Tim Pascasarjana DIKTI yang telah memberikan bantuan dana bagi pelaksanaan penelitian ini.

## DAFTAR PUSTAKA

- Buscaglia, G.C., Bolech, C., dan Lopez, A., 1999, *On the Numerical Solution of The Time Dependent Ginzburg Landau Equations in Multiply Connected Domains*, [http://cabme1.cnea.gov.ar/Gustavo/last\\_pps/csbook.html](http://cabme1.cnea.gov.ar/Gustavo/last_pps/csbook.html)
- Gropp, W.D., Kaper, H.G., Leaf, G.K., Levine, D.M., Palumbo, M. dan Vinokur, V.M., 1996, Numerical Simulation of Vortex Dynamics in Type II Superconductors, *Journal of Computational Physics*, 123, hal 254-266.
- Misko, V.R., Fomin, V.M., Devreese, J.T., dan Moshchalkov, V.V., 2002, Vortex states in a mesoscopic superconducting triangle, *Physica C*, 369, hal 361-365.
- Nurwantoro, P., 1998, *A Theoretical Study of The Surface Nucleation Field at  $H_{c3}$  and of Superconducting Surface Sheats in Isotropic Type-II Superconductors*, Disertasi, Univer-

sity of Birmingham, Birmingham, Tidak dipublikasikan.

Winiecki, T., dan Adams, C.S., 2002, A Fast Semi-Implicit Finite-Difference Method for the TDGL Equations, *Journal of Computational Physics*, 179, hal 127-139.

