

BILANGAN RAMSEY SISI DARI $\hat{r}(P_3, P_n)$ (Ramsey Number from the Side $\hat{r}(P_3, P_n)$)

Chairul Imron¹ dan Edy Tri Baskoro²

¹Jurusan Matematika, FMIPA ITS Surabaya
imron-its@matematika.its.ac.id

²Departemen Matematika, FMIPA ITB Bandung
ebaskoro@dns.math.itb.ac.id

ABSTRAK

Pada paper ini akan ditunjukkan bahwa bilangan Ramsey sisi dari $\hat{r}(P_3, P_n)$ untuk $n = 13, 14, 15$ adalah $20, 23, 24$. Ditunjukkan pula bahwa $\hat{r}(P_3, P_n) = \hat{r}(P_3, P_k) + \hat{r}(P_3, P_l)$ dengan $n = k+l-1$ untuk n ganjil dan k, l genap.

Kata kunci: Bilangan Ramsey sisi, Graph lintasan

ABSTRACT

In this paper it will be shown that Ramsey numbers from the side $\hat{r}(P_3, P_n)$ from $n = 13, 14, 15$ are $20, 23, 24$. It is also shown that $\hat{r}(P_3, P_n) = \hat{r}(P_3, P_k) + \hat{r}(P_3, P_l)$ with $n = k+l-1$ for n odd and k, l even integer

Keywords: Side Ramsey number, Lane graph

Makalah diterima tanggal 2 April 2006

1. PENDAHULUAN

Diberikan dua graph F dan H , notasi $G \text{ ? } (F, H)$ menyatakan bahwa setiap pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada semua sisi graph G akan mengakibatkan G memuat subgraph F berwarna merah atau memuat subgraph H berwarna biru. Bilangan Ramsey klasik $r(F, H)$ adalah banyaknya simpul minimum dari suatu graph G yang bersifat $G \text{ ? } (F, H)$, sedangkan bilangan Ramsey sisi $\hat{r}(F, H)$ adalah banyaknya sisi minimum dari suatu graph G yang bersifat $G \text{ ? } (F, H)$.

Pada paper ini akan dikaji bilangan Ramsey sisi untuk kombinasi graph lintasan P_3 dengan graph lintasan P_n dengan $n = 13,$

$14, 15$, sedangkan untuk $n = 3, 4, \dots, 12$ sudah dikaji (Erdős *dkk*, 1978). Pada paper ini, akan dikaji pula hubungan antara $n =$ genap dengan n ganjil untuk $n = 15$.

2. NOTASI DAN DEFINISI

Graph G yang biasanya ditulis dengan $G(V, E)$ terdiri dari himpunan tak kosong simpul yang biasanya disimbolkan dengan $E(G)$. Setiap $u, v \in V(G)$ tersebut dengan simpul dari graph G dan $e = (u, v)$ merupakan pasangan terurut dari simpul yang disebut dengan sisi dari graph G . Untuk memudahkan, sisi $e = (u, v)$ sering ditulis dengan uv . Orde dari G dinotasikan dengan $|V(G)|$ yaitu banyaknya simpul dalam graph G ,

sedangkan banyaknya sisi dinotasikan dengan $|E(G)|$. Derajat dari suatu simpul v di G adalah banyaknya simpul yang bertetangga dengan v .

Dua simpul dikatakan bebas jika dua simpul tersebut tidak bertetangga, sedangkan suatu himpunan $S \subseteq V(G)$ dikatakan himpunan bebas jika setiap dua simpul di S adalah bebas dalam G . Dengan cara yang sama, dua sisi di G dikatakan saling bebas jika dua sisi tersebut mempunyai empat simpul yang berbeda. Himpunan $T \subseteq E(G)$ dikatakan himpunan sisi bebas jika setiap dua sisi yang berbeda di T adalah bebas dalam G .

Definisi 2.1 Bilangan Ramsey $r(k,l)$ didefinisikan sebagai bilangan minimum N sedemikian hingga pewarnaan X dari himpunan sisi K_N dinotasikan dengan $E(K_N)$ dimana K_N memuat K_k merah atau K_l biru sebagai subgraph. Pewarnaan X merupakan fungsi dari $\{(i,j) \mid i \neq j \text{ dan } i,j \in \{1,2, \dots, N\}\}$ ke $\{\text{merah, biru}\}$

3. BILANGAN RAMSEY SISI

Bilangan ramsey sisi dari $\hat{r}(P_3, P_n)$ adalah banyaknya sisi pada suatu graph G sedemikian hingga ditemukan lintasan P_3 berwarna merah atau lintasan P_n berwarna biru yang merupakan subgraph dari G .

Telah dihitung oleh Nuraeni (2005), untuk $n = 3, 4, 5, \dots, 12$, seperti tertera pada Tabel 1.

Tabel 1 : Bilangan Ramsey Sisi

P_n	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
$\hat{r}(P_3, P_n)$	3	5	6	8	10	12	13	16	16	19

Teorema-teorema berikut merupakan sebagian penjelasan dari Tabel 1.

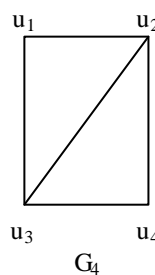
Teorema 3.1. (Erdős dkk, 1978)

$$\hat{r}(P_3, P_4) = 5, \hat{r}(P_3, P_6) = 8, \hat{r}(P_3, P_8) = 12$$

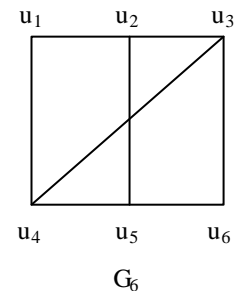
Bukti: Perhatikan Gambar 1, ambil X sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_4 . Andaikan

G_4 tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan X tersebut akan memuat P_4 biru. Untuk menunjukkan adanya P_4 biru, lihat Gambar 1 yaitu konstruksi graph G_4 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_4)| = 4$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_4)| = 5$. Oleh karena itu, hanya ada dua sisi yang dapat berwarna merah yang tidak membentuk lintasan P_3 . Hal tersebut mengakibatkan G_4 memuat P_4 biru.

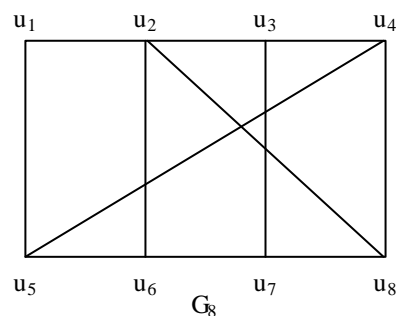
Ambil satu sisi sebarang di G_4 , sehingga $|E(G_4)| = 4$, kemudian warnai biru. Karena $|E(G_4)| = 4$, maka tidak ditemukan P_4 biru yang diharapkan. Jadi $\hat{r}(P_3, P_4) = 5$ dan perhatikan bahwa graph G_4 dapat diawali atau diakhiri pada simpul u_1 atau simpul u_2 .



Gambar 1 : $n = 4$



Gambar 2 : $n = 6$



Gambar 3 : $n = 8$

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_6) = 8$. Perhatikan Gambar 2, yaitu konstruksi graph G_6 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_6)| = 6$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_6)| = 8$, dimana :

$$V(G_6) = \{u_i | i = 1, 2, \dots, 6\}$$

$$E(G_6) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4, \text{ dengan}$$

$$E_1 = \{u_i u_{i+1} | i = 1, 2\}$$

$$E_2 = \{u_i u_{i+1} | i = 4, 5\}$$

$$E_3 = \{u_i u_{i+3} | i = 1, 2, 3\}$$

$$E_4 = \{u_3 u_4\}$$

Dengan memperhatikan graph G_6 , jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_6 biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum tiga sisi yang saling bebas yang terletak di :S

1. tiga merah di E_3
2. satu merah di E_1 , satu merah di E_2 dan satu merah di E_3
3. satu merah di E_1 , satu merah di E_2 dan satu merah di E_3

Dengan memperhatikan letak merah di tiga sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan sisi berwarna biru yang diawali atau diakhiri pada simpul u_1 atau u_6 .

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_8) = 12$. Perhatikan Gambar 3, yaitu konstruksi graph G_8 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_8)| = 8$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_8)| = 12$, dimana :

$$V(G_8) = \{u_i | i = 1, 2, \dots, 8\}$$

$$E(G_8) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5, \text{ dengan}$$

$$E_1 = \{u_i u_{i+1} | i = 1, 2, 3\}$$

$$E_2 = \{u_i u_{i+1} | i = 5, 6, 7\}$$

$$E_3 = \{u_i u_{i+4} | i = 1, 2, 3, 4\}$$

$$E_4 = \{u_2 u_8\}$$

$$E_5 = \{u_4 u_5\}$$

Dengan memperhatikan graph G_8 , jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_8 biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum empat sisi yang saling bebas yang terletak di :

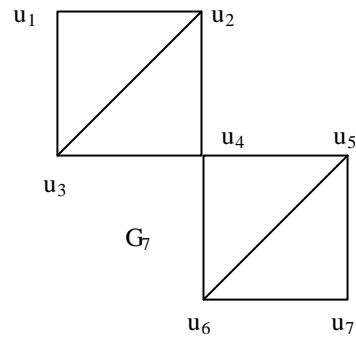
1. empat merah di E_3
2. dua merah di E_3 , satu merah di E_1 dan satu merah di E_2
3. dua merah di E_1 , dan dua merah di E_2

4. satu merah di E_1 , satu merah di E_2 , satu merah di E_3 dan satu merah di E_4
 Dengan memperhatikan letak merah di empat sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan sisi berwarna biru yang diawali atau diakhiri pada simpul u_i .

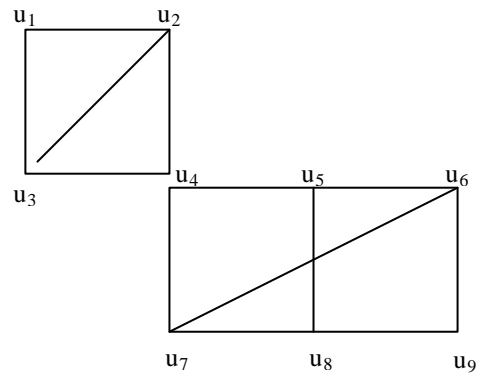
Berikut teorema yang lainnya, merupakan penjelasan dari tabel di atas.

Teorema 3.2 (Erdős dkk, 1978)

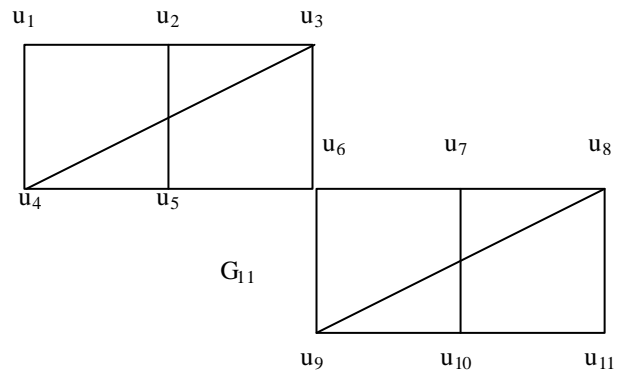
$$\hat{r}(P_3, P_7) = 10, \hat{r}(P_3, P_9) = 13, \hat{r}(P_3, P_{11}) = 16$$



Gambar 4: $n = 7$



Gambar 5: $n = 9$



Gambar 6: $n = 11$

Bukti: Perhatikan Gambar 4, ambil x sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_7 . Andaikan G_7 tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan x tersebut akan memuat P_7 biru. Untuk menunjukkan adanya P_7 biru, lihat Gambar 4 yaitu kontruksi graph G_7 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_7)| = 7$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_7)| = 10$.

Perhatikan kembali kontruksi graph G_7 , sebenarnya graph tersebut merupakan gabungan dari dua graph G_4 dengan menggabungkan salah satu sisinya, yaitu simpul u_1 dari graph bagian bawah. Telah dijelaskan diatas bahwa G_4 dapat diawali atau diakhiri pada simpul u_1 . Sedangkan penggabungan dua graph tersebut terletak pada simpul-simpul tersebut. Jadi dapat ditemukan P_7 biru yang diinginkan, sehingga $\hat{r}(P_3, P_7) = 10$

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_9) = 13$. Perhatikan Gambar 5, yaitu kontruksi graph G_9 dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_9)| = 9$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_9)| = 13$, dengan cara yang sama, perhatikan kembali kontruksi graph G_9 , sebenarnya graph tersebut merupakan gabungan dari graph G_4 (bagian atas graph G_9) dan graph G_6 (bagian bawah graph G_9) dengan menggabungkan salah satu sisinya, yaitu simpul u_4 pada G_4 dan simpul u_1 pada G_6 , telah dijelaskan di atas bahwa G_4 dapat diakhiri pada simpul u_2 dan G_6 dapat diawali pada simpul u_1 . Sedangkan penggabungan dua graph tersebut terletak pada simpul-simpul tersebut. Jadi dapat ditemukan P_9 biru yang diinginkan, sehingga $\hat{r}(P_3, P_9) = 13$

Untuk menunjukkan $\hat{r}(P_3, P_{11}) = 16$. Perhatikan Gambar 6, yaitu kontruksi graph G_{11} dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_{11})| = 11$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_{11})| = 16$, dengan cara yang sama pula, perhatikan kembali kontruksi graph G_{11} , sebenarnya graph tersebut merupakan gabungan dari dua graph G_6 dengan menggabungkan salah satu sisinya, yaitu simpul u_6 dan simpul u_1 . Telah dijelaskan di atas bahwa G_6 dapat diawali atau diakhiri pada simpul u_1 atau u_6 . Sedangkan penggabungan dua graph tersebut terletak pada simpul-simpul tersebut. Jadi dapat

ditemukan P_{11} biru yang diinginkan, sehingga $\hat{r}(P_3, P_{11}) = 16$

Dari pembuktian Teorema 3.2, dapat diduga bahwa bilangan ramsay yang lebih besar lagi, perhatikan dugaan di bawah ini.

Dugaan 3.3 $\hat{r}(P_3, P_n) = \hat{r}(P_3, P_k) + \hat{r}(P_3, P_l)$ dimana $n = k + l$ untuk $n = 7$ ganjil, k dan l genap.

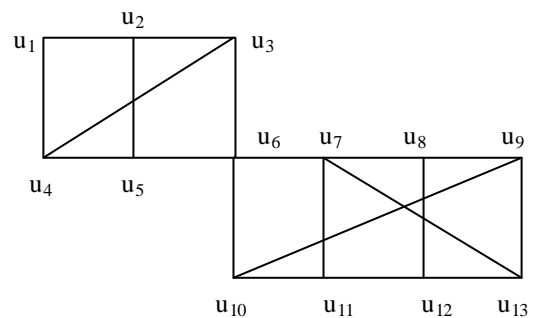
Bukti. Telah dihitung oleh Nuraeni, bahwa $\hat{r}(P_3, P_4) = 5$, dengan mengambil $l = k = 4$ maka

$\hat{r}(P_3, P_7) = \hat{r}(P_3, P_4) + \hat{r}(P_3, P_4) = 5 + 5 = 10$ sesuai dengan perhitungan pada tabel di atas.

Begitu juga untuk $n = 9$, untuk $\hat{r}(P_3, P_4) = 5$ dan $\hat{r}(P_3, P_6) = 8$, dengan mengambil $k = 4$ dan $l = 6$ maka $\hat{r}(P_3, P_9) = \hat{r}(P_3, P_4) + \hat{r}(P_3, P_6) = 5 + 8 = 13$ sesuai dengan perhitungan pada tabel di atas.

Sedangkan untuk $n = 11$, $\hat{r}(P_3, P_6) = 8$, dengan mengambil $k = l = 6$ maka $\hat{r}(P_3, P_{11}) = \hat{r}(P_3, P_6) + \hat{r}(P_3, P_6) = 8 + 8 = 16$ sesuai dengan perhitungan pada tabel di atas.

Teorema 3.4 $\hat{r}(P_3, P_{13}) = 20$



Gambar 7: $n = 13$

Bukti. Perhatikan Gambar 7, ambil x sebarang pewarna 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_{13} . Andaikan G_{13} tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan x tersebut akan memuat P_{13} biru. Untuk menunjukkan adanya P_{13} biru, lihat Gambar 7 yaitu kontruksi graph G_{13} dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_{13})| = 13$ dan

jumlah sisi sebanyak $|E(G_{13})| = 20$. dimana:

$$V(G_{13}) = \{u_i' \mid i = 1, 2, \dots, 13\} = \{u_i' \mid i = 1, 2, \dots, 6\} \cup \{u_i' \mid i = 6, 7, \dots, 13\} \text{ atau}$$

$$V(G_{13}) = V(G_6) \cup V(G_8) \text{ sedangkan } V(G_6) \cap V(G_8) = \{u_6\} \text{ yang merupakan simpul penghubung antara graph } G_6 \text{ dan graph } G_8.$$

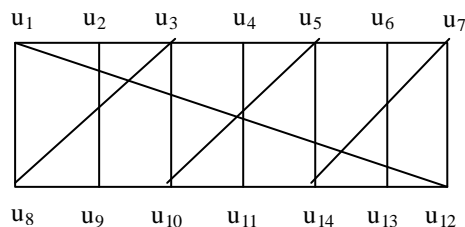
$$E(G_{13}) = E(G_6) \cup E(G_8)$$

Katakan bahwa blok-atas adalah subgraph G_{13} bagian atas yang sama dengan graph G_6 dan blok-bawah adalah subgraph G_{13} bagian bawah yang sama dengan graph G_8 . Dengan memperhatikan graph G_{13} , jumlah sisi yang mungkin diberi warna agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_{13} biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum enam sisi yang saling bebas yang terletak di :

1. tiga merah di blok-atas dan tiga merah di blok-bawah
2. dua merah di blok-atas dan empat merah di blok-bawah

Kejadian 1. Perhatikan kembali uraian dari G_6 yang merupakan blok-atas, telah dibuktikan di atas bahwa G_6 dapat ditemukan lintasan biru yang berakhir pada simpul u_6 atau simpul terakhir. Sedangkan tiga merah terletak pada blok-bawah yang berbentuk G_8 dan telah terbukti dapat dicari lintasan biru yang diawali dari simpul terakhir dari blok diawali dari simpul awal, jadi dapat ditemukan lintasan P_{13} biru. Begitu juga untuk kejadian 2. Sehingga memperhatikan letak merah di tiga sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan P_{13} biru.

Teorema 3.5 $\hat{r}(P_3, P_{14}) = 23$



G_{14}

Gambar 8: $n = 14$

Bukti. Perhatikan Gambar 8, ambil x sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_{14} . Andaikan G_{14} tidak memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan x tersebut akan memuat P_{14} biru. Untuk menunjukkan adanya P_{14} biru, lihat Gambar 8 yaitu konstruksi graph G_{14} dengan jumlah simpul sebanyak

$|V(G_{14})| = 14$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(G_{14})| = 23$. dimana :

$$V(G_{14}) = \{u_i' \mid i = 1, 2, \dots, 14\}$$

$$E(G_6) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5, \text{ dengan}$$

$$E_1 = \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, 6\}$$

$$E_2 = \{u_i u_{i+1} \mid i = 8, 9, \dots, 13\}$$

$$E_3 = \{u_i u_{i+7} \mid i = 1, 2, \dots, 7\}$$

$$E_4 = \{u_i u_{i+5} \mid i = 3, 5, 7\}$$

$$E_5 = \{u_1 u_{14}\}$$

Dengan memperhatikan graph G_{14} , jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_{14} biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum tujuh sisi yang saling bebas dengan komposisi peletakan lihat Tabel 2

Tabel 2: Letak Merah

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
-	-	7	-	-
-	-	3	3	1
1	1	5	-	-
1	1	4	1	-
1	1	2	2	1
2	2	3	-	-
2	2	2	1	-
2	2	1	2	-
3	3	-	1	-

Dengan memperhatikan letak merah di tujuh sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan P_{14} biru.

Teorema 3.6 $\hat{r}(P_3, P_{15}) = 24$

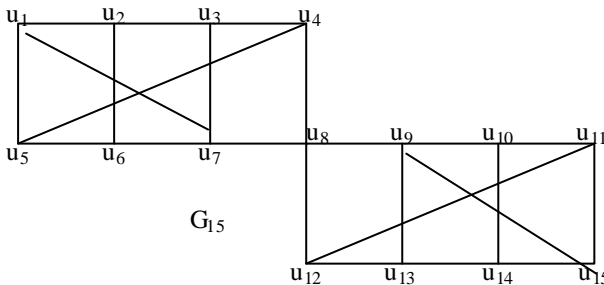
Bukti. Perhatikan Gambar 9, ambil x sebarang pewarnaan 2-warna (misal merah dan biru) pada sisi G_{15} . Andaikan G_{15} tidak

memuat P_3 merah, akan dibuktikan bahwa pewarnaan x tersebut akan memuat P_{15} biru. Untuk menunjukkan adanya P_{15} biru, lihat Gambar 9 yaitu konstruksi graph G_{15} dengan jumlah simpul sebanyak $|V(G_{15})| = 24$, dimana :

$$V(G_{15}) = \{u_i' \mid i = 1, 2, \dots, 15\} = \{u_i' \mid i = 1, 2, \dots, 8\} \cup \{u_i' \mid i = 8, 9, \dots, 15\} \text{ atau}$$

$$V(G_{15}) = V(G_8) \cup V(G_8) \text{ sedangkan } V(G_8) \cup V(G_8) = \{u_8\} \text{ yang merupakan simpul penghubung antara graph } G_8 \text{ atas dan graph } G_8 \text{ bawah.}$$

$$E(G_{15}) = E(G_8) \cup E(G_8)$$



Gambar 9: $n = 15$

Katakan bahwa blok-atas adalah subgraph G_{15} bagian atas yang sama dengan graph G_8 dan blok-bawah adalah subgraph G_{15} bagian bawah yang sama dengan graph G_8 . Dengan memperhatikan graph G_{15} , jumlah sisi yang mungkin diberi warna merah agar supaya tidak ditemukan P_3 merah tetapi dapat ditemukan P_{15} biru, maka sisi-sisi yang mungkin dapat diberi warna merah adalah maksimum tujuh sisi yang saling bebas yang terletak di:

1. empat merah di blok-atas dan tiga merah di blok-bawah
2. tiga merah di blok-atas dan empat merah di blok-bawah

Kejadian 1. Perhatikan kembali uraian dari G_8 yang merupakan blok-atas (G_8 yang terbalik), telah dibuktikan diatas bahwa G_8 dapat ditemukan lintasan biru yang berakhir pada simpul u_1 atau simpul awal. Sedangkan empat merah terletak pada blok-bawah yang berbentuk G_8 dan telah terbukti dapat dicari lintasan biru yang diawali dari simpul awal yaitu u_1 . Jadi blok-atas diakhiri pada simpul terakhir dan blok-bawah diawali dari simpul awal, jadi dapat ditemukan lintasan P_{15} biru. Begitu juga untuk kejadian 2. Sehingga memperhatikan letak merah di tiga sisi tersebut, dipastikan dapat ditemukan lintasan P_{15} biru.

4. KESIMPULAN

Paper ini memberikan kontribusi pada penentuan bilangan Ramsey sisi. Khusus bilangan Ramsey sisi $\hat{r}(P_3, P_n)$ untuk $n = 13, 14, 15$, untuk n yang lebih besar belum ditemukan dan sebagai batasan bahwa $\hat{r}(P_3, P_n) \leq 2n - 1$ untuk $n = 3$ yang telah ditemukan oleh Nuraeni.

DAFTAR PUSTAKA

- P. Erdős, R.J. Faudree, C.C. Rousseau, R.H. Schlep, 1978, *The Size Ramsey Number*, Periodica Mathematica Hungaria, Vol. 9 (1-2), 145-161.
- R.J. Faudree, J. Seehan, 1983, *Size Ramsey Number for Small-Order Graphs*, Journal of Graph Theory, Vol. 7, 35-55.
- Y. Nuraeni, 2005, *Bilangan Ramsey Sisi Untuk Graf Lintasan*, Tesis S2, Departemen Matematika FMIPA ITB.